අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2021 (2022)

10 සංයුක්ත ගණිතය I

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

I පත්‍රය

A කොටස	10 x 25	=	250
B කොටස	05 x 150	=	750

එකතුව $= \frac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමග □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i)		√	△ $\frac{4}{5}$
(ii)		√	△ $\frac{3}{5}$
(iii)		√	△ $\frac{3}{5}$

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(6r+1) = n(3n+4)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ සඳහා, ව.පැ. = 6+1=7 හා

ද.පැ = 1(3+4) = 7 වේ.

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **(5)**

> $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා

k යනු ඕනෑම ධන නිඛිලයක් යැයි ගෙන $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(6r+1) = k(3k+4).$ **(5)**

> $n=k$ සඳහා ප්‍රකාශනය ලිවීමට

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1}(6r+1) = \sum_{r=1}^{k}(6r+1) + \{6(k+1)+1\}$

$= k(3k+4) + 6k + 7$ **(5)**

> "$n=k$ ප්‍රතිඵලය, "$n=k+1$" හි ආදේශ කිරීම සඳහා

$= 3k^2 + 10k + 7$

$= (k+1)(3k+7).$ **(5)**

$= (k+1)[3(k+1)+4].$

> $(k+1)$ $(3k+7)$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයක් පෙන්වා තිබීමට

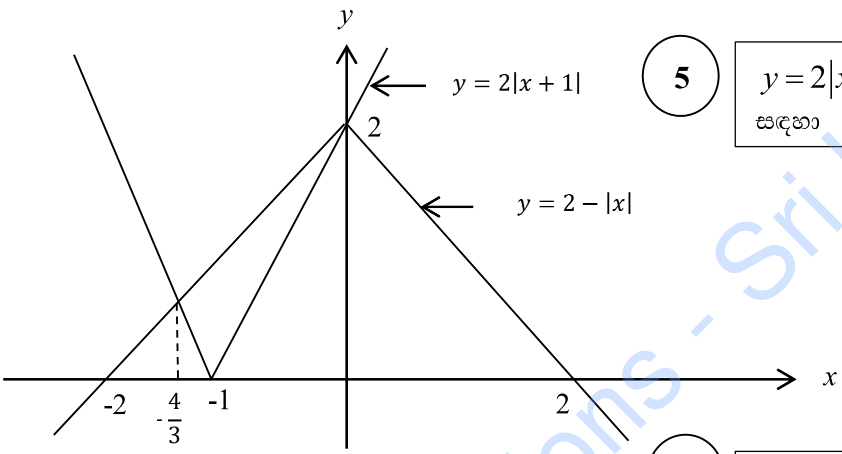
ඒ නයින්, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යනම් $n=k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යබව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්ම මඟින් සියලු $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. **(5)**

> ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයට අනුව නිගමනයට (සියලුම අනෙක් පියවර නිවැරදි නම් පමණි.)

2. එක ම රූප සටහනක $y=2|x+1|$ හා $y=2-|x|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $2|x+2|+|x|\le 4$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



(5) $y=2|x+1|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

(5) $y=2-|x|$ ප්‍රස්තාරය සඳහා

(ප්‍රස්තාර සඳහා ලකුණු 10 ම ලබා ගැනීමට y - අක්ෂය මත පොදු ඡේදන ලක්ෂ්‍යය තිබිය යුතුය. නොඑසේ නම් ලකුණු 05 ක් පමණි.)

එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x − ඛණ්ඩාංක $x = 0$ වේ.

$x < -1$ සඳහා අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x − ඛණ්ඩාංක $-2(x+1)=2+x$ මඟින් දෙනු ලබයි.

මෙය $x=-\frac{4}{3}$ ලබා දෙයි. (5)

$x = 0$ සහ $x=-\frac{4}{3}$ පෙන්වා තිබීමට

$t=\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. (5)

$t=\frac{x}{2}$ ආදේශයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

එවිට දෙන ලද අසමානතාව $2|2t+2|+|2t|\le 4$ බවට පත් වේ.

මෙය $2|t+1|\le 2-|t|$ ට තුල්‍ය වේ.

ප්‍රස්තාර මඟින් $-\frac{4}{3}\le t\le 0.$

$\therefore\quad -\frac{8}{3}\le x\le 0.$ (5)

නිවැරදි විසඳුම ලබා ගැනීමට

විකල්ප ක්‍රමය 1:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

(i) අවස්ථාව $x \le -2$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow -2(x+2)-x \le 4$

$\Leftrightarrow \quad -3x-4 \le 4$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{8}{3} \le x$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-\frac{8}{3} \le x \le -2$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $-2 < x \le 0$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)-x \le 4$

$\Leftrightarrow \quad x \le 0$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම වන්නේ $-2 < x \le 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(iii) අවස්ථාව $x > 0$

එවිට, $2|x+2|+|x| \le 4 \Leftrightarrow 2(x+2)+x \le 4$

$\Leftrightarrow \quad 3x+4 \le 4$

$\Leftrightarrow \quad x \le 0$

ඒ නයින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්තා 3ම සඳහා	(10)
නිවැරදි විසඳුම් සහිත අවස්තා 2 ක් සඳහා	(5)

$\therefore$ දෙන ලද අසමානතාව සඳහා විසඳුම් වන්නේ $-\frac{8}{3} \le x \le 0$ (5)

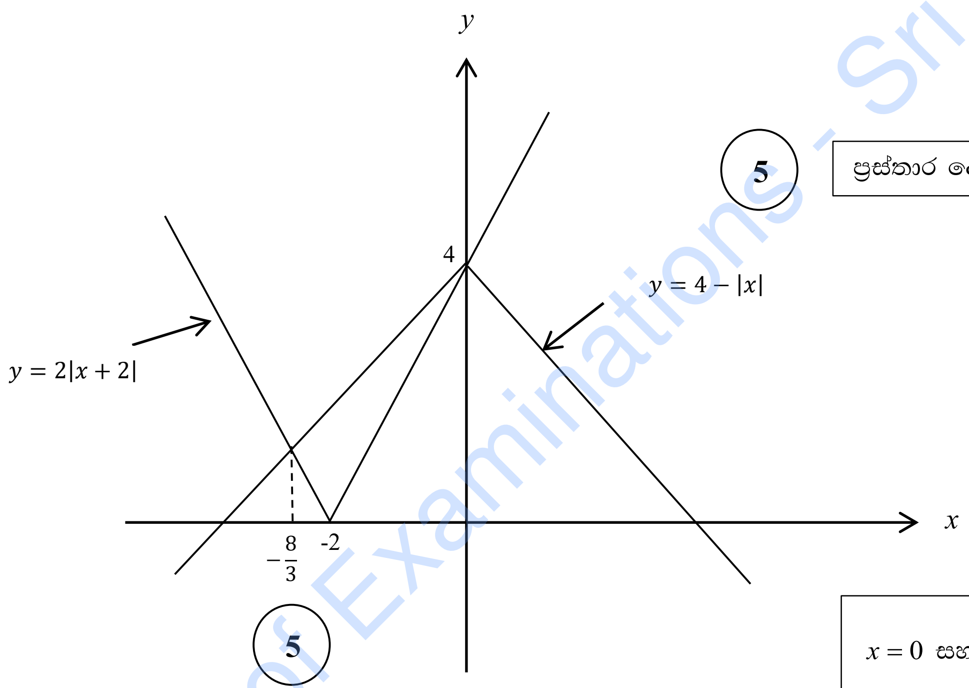
තෘප්තකරන x හි අගයන් වේ.

විකල්ප ක්‍රමය 2:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$$2|x+2|+|x|\leq 4$$

$$\Leftrightarrow 2|x+2| \leq 4-|x|$$



(5) ප්‍රස්තාර දෙක සඳහා

$x=0$ සහ $x=-\frac{8}{3}$ පෙන්වා තිබීම.

ප්‍රස්තාර මගින්,

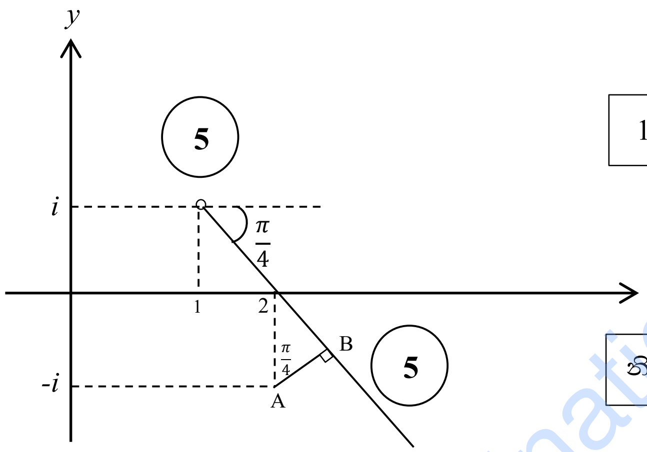
$$2|x+2|\leq 4-|x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{8}{3}\leq x\leq 0$$

(5) නිවැරදි විසඳුම පෙන්වා තිබීමට

3. ආගන්ඩ් සටහනක, $\text{Arg}(z-1-i) = -\frac{\pi}{4}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $\text{Arg}(iz+1-i) = \frac{\pi}{4}$ සපුරාලන $|z-2+i|$ හි අවම අගය $\frac{1}{\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

$$\text{Arg}\left(z-(1+i)\right) = -\frac{\pi}{4}$$



1+i හි සිදුර

නිවැරදි අර්ධ රේඛාව

$$\text{Arg}\left(i(z-i-1)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}\, i + \text{Arg}\left(z-(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}\left(z-(1+i)\right) = -\frac{\pi}{4} \quad (5)$$

ගුණිතයක විස්තාරය එකායයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම සහ $\text{Arg}\, i = \frac{\pi}{2}$ භාවිතය

දැන්, $\min |z-(2-i)| = AB$ (5)

$$= 1.\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

අඩුම දුර තහවුරු කිරීම.

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

විකල්ප ක්‍රමය:

ඉහත පරිදි ප්‍රස්තාර සඳහා (5) + (5)

$z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\dfrac{\pi}{4} = Arg(iz + 1 - i) = Arg\big(1 - y + i(x-1)\big)$

$\therefore \quad x - 1 = (1)(1 - y)$ (5)

$\Rightarrow \quad x + y = 2.$

දෙන ලද විස්තාරය x හා y අතර සම්බන්ධයක් ලෙස ලිවීම.

දැන් $|z - 2 + i| = |x + iy - 2 + i|$

$= |(x-2) + i(y+1)|$

$= |y + i(y+1)| \qquad (\because \qquad y)$

$= \sqrt{y^2 + (y+1)^2}$

$= \sqrt{2\left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$ (5)

මාපාංකය, x හෝ y හි වර්ග පූර්ණය ලෙස ලිවීම.

$\geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\because \ 2\left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$ (= 0 වන්නේ $y = -\dfrac{1}{2}$ විටය.))

$\therefore \min|z - 2 + i| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ (5)

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

4. $k > 0$ යැයි ගනිමු. $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^7 හි සංගුණකය හා $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x^{-7} හි සංගුණකය සමාන බව දී ඇත. $k = 1$ බව පෙන්වන්න.

$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^{11}$ සඳහා

$$T_{r+1} = {}^{11}C_r (x^2)^{11-r}\left(\frac{k}{x}\right)^r = {}^{11}C_r x^{22-3r} k^r$$

$22 - 3r = 7 \Rightarrow r = 5$ **(5)** | r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore\ x^7$ හි සංගුණකය $= {}^{11}C_5\ k^5$ **(5)** | නිවැරදි සංගුණකය

$\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ සඳහා $T_{r+1} = {}^{11}C_r\ x^{11-r}\ (-1)^r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r\ {}^{11}C_r\ x^{11-3r}$

$11-3r = -7 \Rightarrow\ r = 6$ **(5)** | r හි නිවැරදි අගය සඳහා

$\therefore\ x^{-7}$ හි සංගුණකය $= {}^{11}C_6$ **(5)** | නිවැරදි සංගුණකය

එවිට, ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5\ k^5$ මගින් ${}^{11}C_6 = {}^{11}C_5$ නිසා $k = 1$ ලබා දෙයි.

(5) | පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = 4$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin 2x}{x^2(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$ (5)

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \times \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= \left(\lim_{2x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right) \times \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right) \times \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$= 1 \times 2 \times 1 \times 2$$

(5) (5) (5) (5)

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

$$= 4.$$

විකල්ප ක්‍රමය 1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos 2x)}{x^2 \cos 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$ (5)

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2 \cos 2x(1+\cos 2x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 4\left(\lim_{2x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\cos 2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}\right)$$

$$= 4 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2$$

(5) (5) (5) (5)

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

$= 4.$

විකල්ප ක්‍රමය 2:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{x^2\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}$$

ප්‍රතිබද්ධයෙන් ගුණ කිරීමට (5)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \times \frac{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\tan x(2\tan^2 x)}{x^2(1-\tan^4 x)} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2x}$$

$$= 2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right)^3 \left(\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\tan^4 x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)$$

$$= 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 2$$

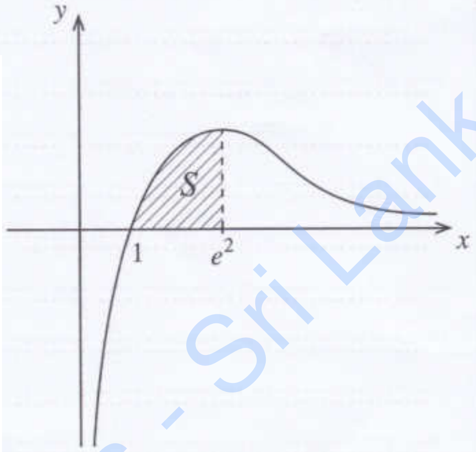
(5) (5) (5) (5)

$$= 4.$$

සීමා එක එකක් සඳහා (5)

6. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $y = 0$ හා $x = e^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස S යැයි ගනිමු. S හි වර්ගඵලය, වර්ග ඒකක 4 ක් බව පෙන්වන්න.

S පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\frac{8\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.



S හි වර්ගඵලය $= \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$ **(5)**

S සඳහා අනුකලය සකසා ගැනීම

$= (\ln x).2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2x^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x} dx$ **(5)**

කොටස් වශයෙන් අනුකලනයට හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$= 4e - 2\int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$= 4e - \left(2\sqrt{x}2\right)\Big|_1^{e^2}$

$= 4e - 4e + 4$

$= 4$ **(5)**

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

අවශ්‍ය පරිමාව $= \int_1^{e^2} \pi \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **(5)**

පරිමාව සඳහා අනුකලය සකසා ගැනීමට

$= \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

$= \pi \frac{(\ln x)^3}{3} \Big|_1^{e^2}$

$= \frac{8\pi}{3}.$ **(5)**

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

7. $t \neq 0$ සඳහා $x = ct$ හා $y = \frac{c}{t}$ මගින් පරාමිතිකව දෙනු ලබන සෘජුකෝණාස්‍ර බහුවලයට $P \equiv \left(cp, \frac{c}{p}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $x + p^2 y = 2cp$ බව පෙන්වන්න.
P හි දී මෙම බහුවලයට වූ අභිලම්භ රේඛාව වෙනත් $Q \equiv \left(cq, \frac{c}{q}\right)$ ලක්ෂ්‍යයකදී බහුවලය නැවත හමු වේ.
$p^3 q = -1$ බව පෙන්වන්න.

$\frac{dx}{dt} = c$ හා $\frac{dx}{dt} = -\frac{c}{t^2}$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{c}{t^2}}{c} = -\frac{1}{t^2}$ **(5)**

t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ P හිදී ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{t^2}\Big|_{t=p} = -\frac{1}{p^2}$

$\therefore$ P හිදී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y - \frac{c}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - cp)$$

$\therefore x + p^2 y = 2cp.$ **(5)**

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

P හිදී අභිලම්බයේ අනුක්‍රමය $= p^2$.

$\therefore$ P හිදී අභිලම්බයේ සමීකරණය $y - \frac{c}{p} = p^2(x - cp)$ **(5)**

අභිලම්බයේ සමීකරණය

$Q \equiv (cq, \frac{c}{q})$ මෙම අභිලම්බ රේඛාව මත වේ.

$\therefore \frac{c}{q} - \frac{c}{p} = p^2(cq - cp) \Rightarrow c(p - q) = -p^3 qc(p - q)$ **(5)**

ආදේශ කිරීම සඳහා

P හා Q ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක් නිසා $p \neq q$ වේ.

$p^3 q = -1.$ **(5)**

පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

විකල්ප ක්‍රමය: (අන්තිම කොටස සඳහා)

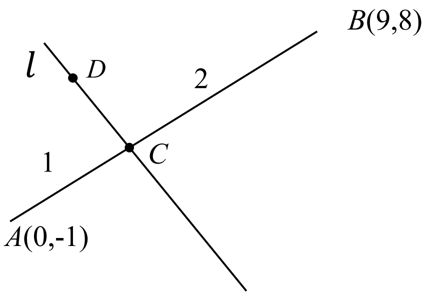
PQ අනුක්‍රමණය $= P$ හිදී අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය **(5)**

$$\therefore \frac{\frac{c}{q} - \frac{c}{p}}{cq - cp} = p^2$$ **(5)** $(\because \quad \neq o)$

$$\therefore p^3 q = -1$$ **(5)**

අවශ්‍යතාව සඳහා
ආදේශය සඳහා
පිළිතුර ලබා ගැනීමට පියවර

8. $A \equiv (0, -1)$ හා $B \equiv (9, 8)$ යැයි ගනිමු. C ලක්ෂ්‍යය AB මත $AC : CB = 1 : 2$ වන පරිදි පිහිටයි. C හරහා යන AB ට ලම්බ වූ l සරල රේඛාවේ සමීකරණය $x + y - 5 = 0$ බව පෙන්වන්න.
$y = 5x + 1$ සරල රේඛාවට AD සමාන්තර වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යය D යැයි ගනිමු. D හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$C \equiv \left(\frac{2(0)+1(9)}{2+1}, \frac{2(-1)+1(8)}{2+1} \right)$$

$\equiv (3,2)$ (5) — C හි ඛණ්ඩාංක

AB හි අනුක්‍රමණය $= 1$

l හි අනුක්‍රමණය $= -1$ (5) — l හි අනුක්‍රමණය සඳහා

$\therefore$ l හි සමීකරණය

$$y - 2 = -1(x - 3)$$

එනම්, $x + y - 5 = 0$. --------------- (1) (5) — l හි සමීකරණය ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

AD හි සමීකරණය $y - (-1) = 5(x - 0)$ (5) — D හි ඛණ්ඩාංක ලබා ගැනීමට පියවර සඳහා

එනම්, $y + 1 = 5x$ -------------- (2)

(1) හා (2) විසඳීමෙන්

$D \equiv (1, 4)$. (5) — $D \equiv (1,4)$ තිබීම

9. $x+2y=3$ සරල රේඛාව, $S \equiv x^2+y^2-4x+1=0$ වෘත්තය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරන බව පෙන්වන්න.
මෙම ලක්ෂ්‍ය දෙක හා $S=0$ වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රය හරහා යන වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.

විකල්ප ක්‍රමය:
(5) (5)
කේන්ද්‍රයේ සිට ලම්බ දුර < අරය
සන්සන්දනයට (5)

$S \equiv x^2+y^2-4x+1=0$

$x+2y-3=0$ රේඛාව ℓ යැයි ගනිමු.

ℓ මත: $x=3-2y;$

$$(3-2y)^2+y^2-4(3-2y)+1=0$$

$$\therefore \quad 5y^2-4y-2=0 \quad (5)$$

වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගැනීමට

මෙම වර්ගජ සමීකරණයේ විවේචක, $\Delta=16+4(5)(2)$ (5)

විවේචකය ලිවීම

$\Delta>0$ නිසා $x+2y=3$ රේඛාව ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකදී S ඡේදනය කරයි. (5)

$\Delta>0$ සඳහා

අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය (5)

$x^2+y^2-4x+1+\lambda(x+2y-3)=0$ ලෙස ලිවිය හැක;

λ ආකාරය සඳහා

මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ.

මෙම වෘත්තය, $(2,0)$ හරහා ගමන් කරන නිසා

$$4-8+1+\lambda(2-3)=0$$

$$\therefore \lambda=-3 \quad (5)$$

$\lambda=-3$ ලබා ගැනීමට

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය

$$x^2+y^2-4x+1+(-3)(x+2y-3)=0$$

එනම්, $\quad x^2+y^2-7x-6y+10=0.$

10. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$ යන්න $R\cos(2x-\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R>0$ හා $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ වේ.
ඒ නයින්, $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1$

$= 2\cos^2 x - 1 + \sqrt{3}(2\sin x\cos x)$

$= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$ (5)

$\cos 2x$ හා $\sin 2x$ භාවිතයෙන් ප්‍රකාශන ලිවීමට

$= 2\left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right]$

$= 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

මෙහි $R = 2$ (5) හා $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (5)

$R = 2$ ලබා ගැනීමට

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ ලබා ගැනීමට

$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x = 1$ සමීකරණය

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 1 = 1$ ට තුල්‍ය වේ.

$\therefore\quad 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

ඒ නයින්, $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (5)

$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ලබා ගැනීමට

$\therefore\quad 2x - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3};\ n \in \mathbb{Z}$

$\therefore\quad x = n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$ (5)

නිවැරදි පිළිතුර ලබා ගැනීමට

11. (*a*) $k>1$ යැයි ගනිමු. $x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න. මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන් $\alpha+\beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වා, α හා β දෙකම ධන වන පරිදි වූ k හි අගයන් සොයන්න.

දැන්, $1<k<3$ යැයි ගනිමු. k ඇසුරෙන්, $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(*b*) $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a,b,c\in\mathbb{R}$ වේ. $(x-1)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය 5 බව හා x^2+x-2 මගින් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ බව දී ඇත. a,b හා c හි අගයන් සොයන්න.

තවද, a,b හා c සඳහා මෙම අගයන් සහිත ව, සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)-2g(x)\le\frac{13}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(a)

$x^2-2(k+1)x+(k-3)^2=0$ හි විවේචකය Δ යැයි ගනිමු.

එවිට $\Delta=4(k+1)^2-4(k-3)^2$ (5)

$=4(k+1+k-3)(k+1-k+3)$

$=32(k-1).$ (5)

$k>1$ නිසා $\Delta>0$ වේ. (5)

$\therefore$ දෙන ලද සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්වික මූල දෙකක් ඇත. (5)

20

$\alpha+\beta=2(k+1)$ හා $\alpha\beta=(k-3)^2$ (5) + (5)

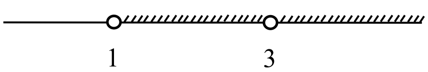
α හා β දෙකම ධන වීම සඳහා

$\alpha+\beta>0$ හා $\alpha\beta>0$ විය යුතුයි. (10)

$k>1$ නිසා $\alpha+\beta=2(k+1)>0$ වේ. (5)

හා $\alpha\beta=(k-3)^2>0$ ම නම් පමණක් $k\neq 3$ වේ. (10)

$\therefore$ අවශ්‍ය k හි අගයන් $1<k<3$ හෝ $k>3$ වේ.



35

දැන් $1<k<3$ යැයි ගනිමු. $\alpha>0$ සහ $\beta>0$ බව දනිමු.

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ හා $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ මූල වන සමීකරණය $\left(x-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=0$ වේ. (5)

එනම්, $x^2-\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=0.$ (5)

එනම්, $\sqrt{\alpha\beta}x^2-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x+1=0.$ (5)

(5)

$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{(k-3)^2}=|k-3|=3-k$ බව දනිමු ($\because$ 3) .

තවද, $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ (5)

$=2(k+1)+2(3-k)$ (5)

$=8.$ (5)

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2\sqrt{2}$ (5) $\left(\because \quad \beta>0.\right)$

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය $(3-k)x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ වේ. (5)

45

(b)

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ හා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1$

$f(x)$ යන්න $(x-1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 5 නිසා ශේෂ ප්‍රමේය මගින්

$f(1)=5.$ (5)

$\therefore\ a+b+3=5$

$a+b=2.$ (5) ---------------- (1)

$g(x)$ යන්න x^2+x-2 න් බෙදූ විට ශේෂය $x+1$ නිසා

$\lambda\in\mathbb{R}$ සඳහා $g(x)=x^3+cx^2+ax+1=(x^2+x-2)(x+\lambda)+x+1$ (5)

$\left((x^0)\right);\quad 1=-2\lambda+1\ \Rightarrow\ \lambda=0.$

$\therefore g(x)=x(x^2+x-2)+x+1$

$=x^3+x^2-x+1.$

ඒ නයින්, $c=1$ හා $a=-1$ වේ. (5) + (5)

දැන් (1) මගින් $b=3$ වේ. (5)

30

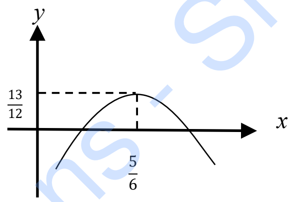
$$f(x)-2g(x)=2x^3-x^2+3x+1-2(x^3+x^2-x+1)$$

$$=-3x^2+5x-1 \quad \textcircled{5}$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=-3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right] \quad \textcircled{5}$$

$$\leq -3 \times \left(\frac{-13}{36}\right), \because \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 \geq 0. \quad \textcircled{5}$$



$$\therefore\ f(x)-2g(x)\leq \frac{13}{12}. \quad \textcircled{5}$$

20

12.(*a*) පහත දී ඇති සංඛ්‍යාංක 10 න් ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 කින් සමන්විත, සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යාවක් සෑදීමට අවශ්‍යව ඇත:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) තෝරා ගනු ලබන සංඛ්‍යාංක 4 ම වෙනස් නම්,

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4 ක් තෝරාගත හැකි නම්,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4 ක සංඛ්‍යා ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \dfrac{(r-B)}{(2r-1)^2}$ වන පරිදි A හා B තාත්ත්වික නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\dfrac{1}{5^{r-1}}U_r = f(r) - f(r-1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයා,

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{5^{r-1}} U_r = 1 + \frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{5^{r-1}} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(a)

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5

(i) 1,2,3,4 හා 5 අතරින් වෙනස් සංඛ්‍යාංක 4කින් සෑදිය හැකි වෙනස් සංඛ්‍යා ගණන

$= {}^5P_4$ (5)

$= 5!$ (5)

$= 120$ (5)

15

(ii) ඕනෑම සංඛ්‍යාංක 4ක් තෝරාගෙන සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන

	එවැනි වෙනත් සංඛ්‍යාංක 4ක සංඛ්‍යා ගණන
වෙනස් සංඛ්‍යාංක හතරකින්	${}^5P_4 = 120$
එක් සංඛ්‍යාංකයක් පමණක් දෙවරක් පුනරාවර්තව සහ අනෙක් සංඛ්‍යාංක දෙක වෙනස්	(10) (5) ${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times \frac{4!}{2!} = 288$
සංඛ්‍යාංක දෙකක් දෙවරක් පුනරාවර්තව	(10) ${}^4C_2 \times \frac{4!}{2!2!} = 36$ (5)
එක් සංඛ්‍යාංකයක් තෙවරක් පුනරාවර්තව	(10) ${}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{4!}{3!} = 16$ (5)

$\therefore$ සෑදිය හැකි සංඛ්‍යා ගණන $= 120 + 288 + 36 + 16$ (5)

$= 460$ (5)

55

(b)

$r \in \mathbb{Z}$ සඳහා

$$U_r = \frac{-16r^3 + 12r^2 + 40r + 9}{5(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$U_r = \frac{A(r-1)}{(2r+1)^2} - \frac{(r-B)}{(2r-1)^2} = \frac{A(r-1)(2r-1)^2 - (r-B)(2r+1)^2}{(2r+1)^2(2r-1)^2}$$

$$\therefore -16r^3 + 12r^2 + 40r + 9 = 5A(r-1)(4r^2 - 4r + 1) - 5(r-B)(4r^2 + 4r + 1)$$

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්

$r^3 : -16 = 5A(4) - 20$

$r^2 : 12 = 5A(-8) - 5(-4B + 4)$

$r^1 : 40 = 25A - 5(1 - 4B)$

$r^0 : 9 = -5A + 5B$ (10)

$A = \dfrac{1}{5}$ සහ $B = 2$

(5) (5)

20

$\therefore U_r = \dfrac{r-1}{5(2r+1)^2} - \dfrac{r-2}{(2r-1)^2}$ (5)

$\therefore \dfrac{1}{5^{r-1}} U_r = \dfrac{r-1}{5^r(2r+1)^2} - \dfrac{r-2}{5^{r-1}(2r-1)^2}$ (5)

හා ඒ නයින්,

$\dfrac{1}{5^{r-1}} U_r = f(r) - f(r-1)$; මෙහි $f(r) = \dfrac{r-1}{5^r(2r+1)^2}$ වේ. (10)

$r = 1;\quad \dfrac{1}{5^0} U_1 = f(1) - f(0)$

$r = 2;\quad \dfrac{1}{5} U_2 = f(2) - f(1)$ (5)

$\vdots \quad \vdots$

$r = n-1;\quad \dfrac{1}{5^{n-2}} U_{n-1} = f(n-1) - f(n-2)$

$r = n\quad \dfrac{1}{5^{n-1}} U_n = f(n) - f(n-1)$ (5)

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \dfrac{1}{5^{r-1}} U_r = f(n) - f(0)$ (5)

$= \dfrac{n-1}{5^n(2n+1)^2} - (-1)$ (5)

$= 1 + \dfrac{n-1}{5^n(2n+1)^2}$ (5)

45

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5^{r-1}}U_r = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{5^n(2n+1)^2}\right)$$

(5) $= 1$. (5)

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{5^{r-1}}U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ. (5)

15

---

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}^\mathrm{T}$ යැයි ද ගනිමු. a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}$ සොයා, සියලු $a \neq 0$ සඳහා $\mathbf{C}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

a ඇසුරෙන් $\mathbf{C}^{-1}$, එය පවතින විට, ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{C}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ නම්, $a = 2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව, $\mathbf{DC} - \mathbf{C}^\mathrm{T}\mathbf{C} = 8\mathbf{I}$ වන පරිදි $\mathbf{D}$ න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

(*b*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ හා $z_2 = 1 + i$ යැයි ගනිමු. $\frac{z_1}{z_2}$ යන්න $x + iy$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$.

තවද, z_1 හා z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කර,

ඒ නයින්, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $n \in \mathbb{Z}^+$ ද $k \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ යැයි ද ගනිමු.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්, $(1 + i\tan\theta)^n = \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $(1 - i\tan\theta)^n$ සඳහා එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලබා ගෙන

$(1 + i\tan\theta)^n + (1 - i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ බව පෙන්වන්න.

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ යන්න $(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = 0$ හි විසඳුමක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*a*) **5**

$$C = AB^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & a+3 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$ **10**

4 ම නිවැරදි නම් **10**
3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් **5**

$|C| = (a^2+3) - (a+1)(a+3) = -4a$

$\neq 0$ (∵ **5**

∴ සියලු $a \neq 0$ සඳහා C^{-1} පවතී. **5**

25

$a \neq 0$ සඳහා $C^{-1} = -\frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 1 & -(a+3) \\ -(a+1) & a^2+3 \end{pmatrix}$ **10**

4 ම නිවැරදි නම් **10**
3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් **5**

$C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} -1 & a+3 \\ a+1 & -a^2-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix}$

10

$\therefore \frac{1}{4a}\begin{pmatrix} 2a+5 \\ -2a^2+a-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ (10)

$\frac{2a+5}{4a} = \frac{9}{8}$ හා $\frac{-2a^2+a-5}{4a} = -\frac{11}{8}$ (5)

මෙම සමීකරණ දෙක මගින් $a = 2$ වේ. (5)

2 ම නිවැරදි නම් (10)

1 ක් පමණක් නිවැරදි නම් (5)

20

---

(5)

$a = 2$ විට $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ හා $C^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

$DC - C^T C = 8I \;\Leftrightarrow\; D - C^T = 8IC^{-1}$ (5)

(5)

$\therefore D = C^T + 8C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 8\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$. (5)

20

(b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(1-i) = \underbrace{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}_{x} + i\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}_{y}$$ (5)

(5)

10

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$ (5)

(5)

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$ (5)

(5)

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$ (10)

30

තාත්ත්වික කොටස් සමාන කිරීම මගින්

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$ (5)

05

(c)

$n \in \mathbb{Z}$ හා $\theta \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ සඳහා

$$(1+i\tan\theta)^n = \frac{1}{\cos^n\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$ (5)

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta) \text{ ------------ } (1)$$ (5)

10

$$(1-i\tan\theta)^n = \left(1+i\tan(-\theta)\right)^n$$

$$= \sec^n(-\theta)\left[\cos n(-\theta) + i\sin n(-\theta)\right]$$

$$= \sec^n\theta(\cos n\theta - i\sin n\theta) \text{ ------------ } (2)$$ (5)

(1) හා (2) මගින් $(1+i\tan\theta)^n + (1-i\tan\theta)^n = 2\sec^n\theta\cos n\theta$ ලැබේ. (5)

10

$z = i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$ මගින්

$$(1+z)^{25} + (1-z)^{25} = \left(1+i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25} + \left(1-i\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)^{25}$$

$$= 2\sec^{25}\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right)$$ (5)

$$= 0, \text{ as } \cos 25\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$ (5)

10

---

14. (*a*) $x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)=\dfrac{4x+1}{x(x-2)}$ යැයි ගනිමු.

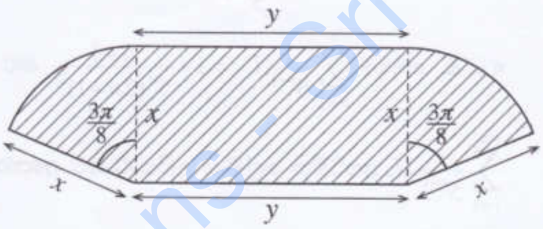
$x \neq 0, 2$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $f'(x)=-\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, x-අන්තඃඛණ්ඩය හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන්, $f(x)+|f(x)|>0$ අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූපයෙහි අඳුරු කළ S පෙදෙසින් ඍජුකෝණාස්‍රයකින් හා කේන්ද්‍රයෙහි $\dfrac{3\pi}{8}$ ක කෝණයක් ආපාතනය කරන වෘත්තයක කේන්ද්‍රික ඛණ්ඩ දෙකකින් සමන්විත ගෙවත්තක් දැක්වේ. එහි මාන, මීටරවලින්, රූපයෙහි දක්වා ඇත. S හි වර්ගඵලය 36 m^2 බව දී ඇත. S හි පරිමිතිය p m යන්න $x>0$ සඳහා $p=2x+\dfrac{72}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව ද, $x = 6$ විට p අවම වන බව ද පෙන්වන්න.



(*a*)

$x \neq 0, 2,$ සඳහා $f(x)=\dfrac{4x+1}{x(x-2)}$

එවිට, $f^1(x)=\dfrac{4x(x-2)-(4x+1)(x-2+x)}{x^2(x-2)^2}$ **(20)**

$=-\dfrac{2(2x^2+x-1)}{x^2(x-2)^2}$

$=-\dfrac{2(2x-1)(x+1)}{x^2(x-2)^2}$, $x \neq 0, 2$ සඳහා. **(5)**

25

හැරවුම් ලක්ෂ්‍යයහි දී:

$f^{1}(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1 \quad x=\frac{1}{2}$ (5)

	$-\infty<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<x<2$	$2<x<\infty$
$f^{1}(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
$f(x)$	↘ අඩු වේ	↗ වැඩි වේ	↗ වැඩි වේ	↘ අඩු වේ	↘ අඩු වේ
	(5)	(5)	(5)	(5)	(5)

$\therefore f(x)$ යන්න $[-1,0)$ හා $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ මත වැඩි වන අතර

$(-\infty,-1]$, $\left[\frac{1}{2},2\right)$ හා $(2,\infty)$ මත අඩු වේ.

30

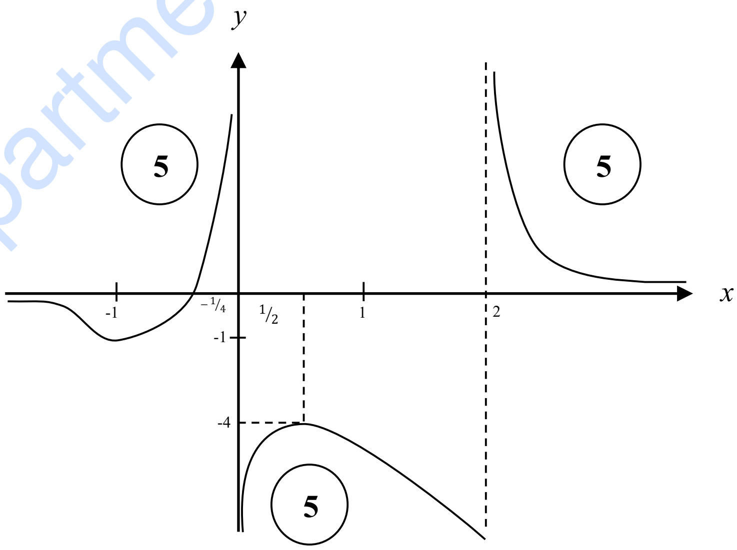
හැරුම් ලක්ෂ්‍ය: $\left(\frac{1}{2},-4\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක් වේ. (5)

$(-1,-1)$ ස්ථානීය අවමයක් වේ. (5)

x - අන්තඃඛණ්ඩය : $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ (5)

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \;\therefore\; y=0$ (5)

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය: $x=0$ සහ $x=2$. (5)



40

$$f(x)+|f(x)| = \begin{cases} 2f(x), & f(x) \geq 0 \text{ විට.} \\ 0, & f(x) < 0 \text{ විට.} \end{cases}$$

$\therefore f(x)+|f(x)|>0$ ම නම් පමණක් $f(x)>0$.

$\therefore \ f(x)+|f(x)|>0$ තෘප්ත කරන තාත්ත්වික අගයන්

$\Leftrightarrow \ -\frac{1}{4}<x<0$ or $x>2$. (5)

(10)

15

(b)

$x>0$ සඳහා;

$$36 = xy+\frac{3}{8}\pi x^2 \quad (10)$$

$$\therefore \quad y=\frac{36}{x}-\frac{3}{8}\pi x, \ x>0 \text{ සඳහා}$$

$$p=2x+2y+2\left(\frac{3}{8}\pi x\right) \quad (10)$$

$$=2x+2\left(\frac{36}{x}-\frac{3}{8}\pi x\right)+\frac{3}{4}\pi x$$

$$\therefore p=2x+\frac{72}{x} \quad (5)$$

$$\frac{dp}{dx}=2-\frac{72}{x^2}; \ x>0.$$

(5)

$$\frac{dp}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6. \quad (5)$$

$0<x<6$ සඳහා $\frac{dp}{dx}<0$ සහ

$x>6$ සඳහා $\frac{dp}{dx}>0$.

$\therefore \ x=6$ විට p අවම වේ. (5)

40

15.(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2 + Bx(x^2+1)+Cx^2$ වන පරිදි A, B හා C නියතයන් හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)dx$ යැයි ගනිමු. $I = \dfrac{\pi}{24} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්**, I අගයන්න.

(*c*) $\dfrac{d}{dx}\left(x\ln(x^2+1)+2\tan^{-1}x-2x\right) = \ln(x^2+1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int \ln(x^2+1)\,dx$ සොයා, $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4+\pi-4)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්

$\displaystyle\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$ හි අගය සොයන්න.

(*a*)

$$x^4+3x^3+4x^2+3x+1 = A(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)+Cx^2$$
$$= A(x^4+2x^2+1)+B(x^3+x)+Cx^2$$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට;

x^0 : 1 = A

x: 3 = B

x^2 : 4 = 2A+C (5) + (5)

$x^3 : 3 = B$

$x^4 : 1 = A$

$\therefore A = 1,\ B = 3$ හා $C = 2.$ (5)

15

$$\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$ (10)

$$\int\frac{x^4+3x^3+4x^2+3x+1}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{1}{x}\,dx+3\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+2\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$ (5)

$$=\ln|x|+3\tan^{-1}x-\frac{1}{x^2+1}+E,$$ මෙහි E යනු අභිමත නියතයක් වේ.

(5) (5) (5) (5)

35

(b)

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\sin^{-1}(\sqrt{x})dx$$

$$=x\sin^{-1}\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}-\int_0^{\frac{1}{4}}x\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$ (10)

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ (5)

$$=\frac{\pi}{24}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$ (5)

20

$\sqrt{x}=\sin\theta$ යැයි ගනිමු. එවිට $dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$

(5)

$x=0$ විට දී, $\theta=0$.

$x=\frac{1}{4}$ විට දී, $\theta=\frac{\pi}{6}$ (5)

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,2\sin\theta\cos\theta d\theta$$ (5)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)d\theta$$ (5)

$$= \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}$$ (5)

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$ (5)

$$\therefore I = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{24}.$$ (5)

35

(c)

$$\frac{d}{dx}(x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x)$$

$$= x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x) + \ln(x^2+1) + \frac{2}{1+x^2} - 2$$ (10)

$$= \ln(x^2+1) + \underbrace{\frac{2x^2+2-2(1+x^2)}{1+x^2}}_{=0}$$

$$= \ln(x^2+1).$$ (5)

15

$\int \ln(x^2+1)dx = x\ln(x^2+1) + 2\tan^{-1}x - 2x + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. (5)

$$\therefore \int_0^1 \ln(x^2+1)dx = \ln 2 + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2$$ (5)

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}(2\ln 2 + \pi - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 4 + \pi - 4)$$ (5)

15

$$\int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1) + \int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$$ (5)

දැන්, $$\int_0^1 \ln(x^2-2x+2)dx$$

$$= \int_0^1 \ln\left((1-x)^2-2(1-x)+2\right)dx$$

$$= \int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$ (5)

$$\therefore \int_0^1 \ln\left[(x^2+1)(x^2-2x+2)\right]dx = 2\int_0^1 \ln(x^2+1)dx$$

$$= \ln 4 + \pi - 4$$ (5)

15

---

16. $P \equiv (x_1, y_1)$ ද l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව ද යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l ට ලම්බ වූ රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක (x_1+at, y_1+bt) මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

P හි සිට l ට ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

l යනු $x+y-2=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $A \equiv (0, 6)$ හා $B \equiv (3, -3)$ ලක්ෂ්‍ය l හි දෙපස පිහිටන බව පෙන්වන්න.

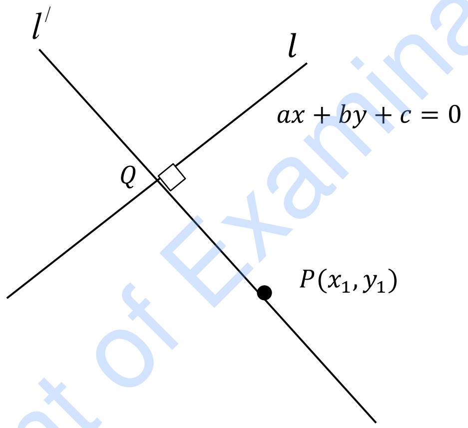
l හා AB රේඛාව අතර සුළු කෝණය සොයන්න.

l ස්පර්ශ කරන, පිළිවෙළින් A හා B කේන්ද්‍ර සහිත S_1 හා S_2 වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

l හා AB රේඛාවේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

S_1 හා S_2 ට C හරහා වූ අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ සමීකරණය ද සොයන්න.

මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන, S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන හා S_2 ට ප්‍රලම්බ වෘත්තයේ සමීකරණය $3x^2+3y^2-38x-22y=0$ බව පෙන්වන්න.



$(a^2+b^2 \neq 0)$

$l^{/}$ හි සමීකරණය: $y-y_1 = \dfrac{b}{a}\,(x-x_1)$. **(5)**

$\therefore \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{x-x_1}{a} = t$ (ලෙස ගනිමු) **(5)**

එවිට, $x = x_1+at, \; y = y_1+bt$ **(5)**

($a=0$ හා $b \neq 0$ හෝ $a \neq 0$ හා $b=0$ විට ද මෙය වලංගු වේ.)

15

---

l හා l' හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය $Q \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_1 + at_1, y_1 + bt_1)$ යැයි ගනිමු.

Q, l මත බැවින් $a(x_1 + at_1) + b(y_1 + bt_1) + c = 0$.

$$\therefore t_1 = -\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}.$$ (5)

P සිට l ට ලම්බ දුර $= PQ$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ (5)

$$= \sqrt{a^2 t_1^2 + b^2 t_1^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|t_1|.$$ (5)

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,.\,\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$ (5)

20

ℓ $2 = 0$ (5)

$(0 + 6 - 2)(3 - 3 - 2) = -8 < 0$ (5) $\therefore$ A හා B, ℓ හි දෙපස පිහිටයි.

10

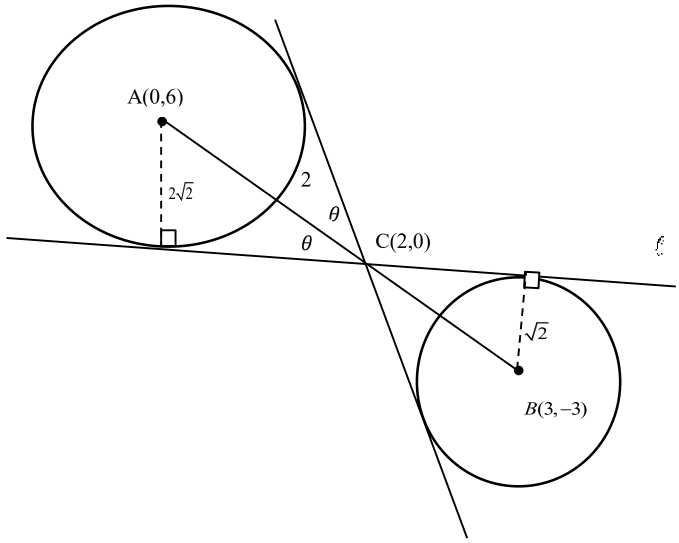
AB හි අනුක්‍රමණය $= -3$ (5)

ℓ හා AB අතර සුළු කෝණය

$$\tan\theta = \left|\frac{-1 - (-3)}{1 + (-1)(-3)}\right|$$ (5)

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$ (5)

15



5 5 5 5

S_1 හි අරය $= \dfrac{|0+6-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ හා S_2 හි අරය $= \dfrac{|3-3-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ වේ.

$\therefore S_1 : x^2 + (y-6)^2 = 8$ 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 12y + 28 = 0.$

$S_2 : (x-3)^2 + (y+3)^2 = 2$ 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 16 = 0$

30

$AC : CB = 2\sqrt{2} : \sqrt{2} = 2:1$ 5

$\therefore C \equiv \left(\dfrac{6+0}{3}, \dfrac{-6+6}{3} \right) = (2,0)$ 5

m යනු අනෙක් පොදු ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය යැයි ගනිමු.

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{2} = \left| \dfrac{m-(-3)}{1+m(-3)} \right|$ 5

$\Leftrightarrow \quad 1-3m = 2m+6$ හෝ $3m-1 = 2m+6$

$\Leftrightarrow \quad m = -1$ හෝ $m = 7$

$\therefore \quad m = 7.$ 5

$\therefore$ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ $y - 0 = 7(x-2).$ 5

එනම්, $7x - y - 14 = 0.$

25

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

S මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින් $c = 0$. (5)

S යන්න S_1 හි පරිධිය සමච්ඡේද කරන බැවින් පොදු ජ්‍යාය A හරහා යයි.

පොදු ජ්‍යාය වන්නේ $S - S_1 \equiv 2gx + (2f + 12)y - 28 = 0$ (5)

එවිට $A \equiv (0, 6)$ යන්න $S - S_1 = 0$ මත බැවින්,

$(2f + 12)(6) - 28 = 0.$ (5)

$(f + 6)(3) - 7 = 0,$ එවිට $f = -\frac{11}{3}.$ (5)

S යන්න S_2 ට ප්‍රලම්බ බැවින්, $2g(-3) + 2f(3) = 0 + 16.$ (5)

$\therefore -3g + 3\left(\frac{-11}{3}\right) = 8, \quad \Rightarrow g = -\frac{19}{3}.$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය;

$x^2 + y^2 + 2\left(\frac{-19}{3}\right)x + 2\left(\frac{-11}{3}\right)y = 0$ (5)

එනම්, $3x^2 + 3y^2 - 38x - 22y = 0.$

35

---

17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ හා $\cos(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, $\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

$\cos C - \cos D = -2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x(\cos 9x - \cos 7x) = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **කෝසයින නීතිය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm හා $\sin 2B = \frac{24}{25}$ බව දී ඇත.

එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබෙන බව පෙන්වා, ඒ එක එකක් සඳහා AC හි දිග සොයන්න.

(*c*) $\sin^{-1}\left[(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}\right] + \tan^{-1}(e^x) = \tan^{-1}(2)$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*)

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ ⟶ (1)

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ ⟶ (2) (5)

10

---

(1) + (2)

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B \quad (5)$$

$A+B=C$ හා $A-B=D$, ලෙස ගැනීමෙන් $A = \frac{C+D}{2}, B = \frac{C-D}{2}$ වේ.

$$\therefore \quad \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right). \quad (5)$$

10

දැන්, $\cos C - \cos D = \cos C + \cos(\pi - D)$ (5)

$$= 2\cos\left(\frac{C+(\pi-D)}{2}\right)\cos\left(\frac{C-(\pi-D)}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\sin\left(\frac{C+D}{2}\right). \quad (5)$$

10

$\cos 9x + \cos 7x + \cot x \ (\cos 9x - \cos 7x) = 0$ $(\sin x \neq 0)$

$\therefore 2\cos 8x \cos x + \dfrac{\cos x}{\sin x}(-2\sin 8x \sin x) = 0$ (5)

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $(\cos 8x - \sin 8x) = 0$ (5)

$\therefore \cos x = 0$ හෝ $\tan 8x = 1$.

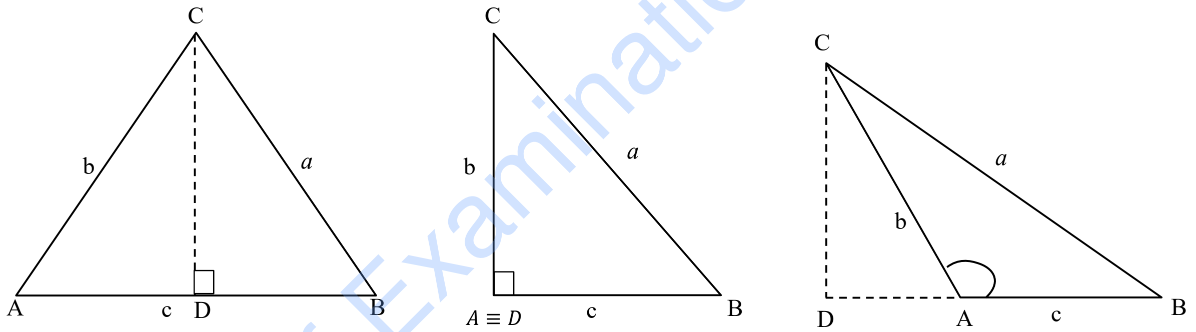
$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$; $m \in \mathbb{Z}$ හෝ $8x = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$; $n \in \mathbb{Z}$.

$x = 2m\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$; $m \in \mathbb{Z}$ හෝ $x = \dfrac{n\pi}{8} + \dfrac{\pi}{32}$; $n \in \mathbb{Z}$. + (5) (5) **20**

(*b*)

කෝසයින් නීතිය: ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගන්න (5)

එවිට $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.



සාධනය: එවිට පයිතගරස් ප්‍රමේයයෙන්,

$BC^2 = BD^2 + DC^2$ ——— (1) (5)

(i) අවස්ථාව A සුළු කෝණයක් විට;

$DC = b\sin A$

$DB = c - b\cos A$ (5)

(ii) අවස්ථාව A මහා කෝණයක් විට;

$DC = b\sin(\pi - A) = b\sin A$

$DB = c + b\cos(\pi - A) = c - b\cos A$ (5)

$\therefore$ මෙම අවස්ථා දෙකම සඳහා, (1) මඟින් $a^2 = b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$

$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$

$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ($\because$ $\cos^2 A = 1$) (5)

$A = \dfrac{\pi}{2}$ විටදී, $\cos A = 0$ බැවින් මෙම අවස්ථාවට ද වලංගු වේ. (5) **30**

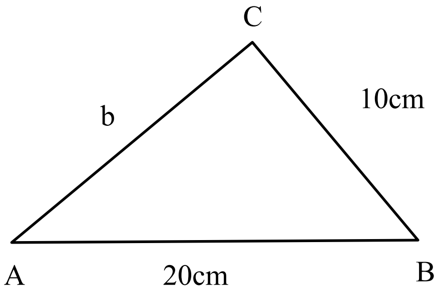
$x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු. $(\cos x \neq 0)$

$\sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x$ 5

$= \dfrac{2\tan x}{\sec^2 x}$

$= \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ 5

10



$\sin 2B = \frac{24}{25} \Rightarrow B$ සුළු කෝණයකි.

$\therefore \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{24}{25}$, මෙහි $t = \tan B$ 5

$12t^2 - 25t + 12 = 0$

$(4t-3)(3t-4) = 0$

$t = \dfrac{3}{4}$ හෝ $\dfrac{4}{3}$ 5 + 5

$\therefore$ B සඳහා වෙනස් විසඳුම් දෙකකි.

$\therefore$ එවැනි වෙනස් ත්‍රිකෝණ දෙකක් තිබේ.

B යනු සුළු කෝණයකි. $\cos B = \dfrac{3}{5}$ හෝ $\cos B = \dfrac{4}{5}$

$\cos B = \dfrac{3}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + 10^2 - 2(20)(10)\left(\dfrac{3}{5}\right) \Rightarrow AC = 2\sqrt{65}.$ 5

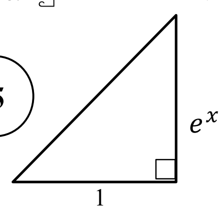
$\cos B = \dfrac{4}{5}$ විට; $AC^2 = (20)^2 + (10)^2 - 2(20)(10)\left(\dfrac{4}{5}\right) \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}.$ 5

25

(c)

$\alpha = \sin^{-1}(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}}$ යැයි ගනිමු. $(1+e^{-2x})^{-\frac{1}{2}} > 0$ බැවින් α සුළු කෝණයකි.

එවිට $\sin\alpha = \left(1+e^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+(e^x)^2}}$ 5



$\therefore \tan\alpha = e^x.$ 5

එවිට, දෙන ලද සමීකරණය $\alpha + \alpha = \lambda$ වේ.

$\therefore \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan\lambda$ (5)

$\Rightarrow \quad \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}} = 2$ (5)

$\Rightarrow \quad e^x = 1 - e^{2x}$

$\Rightarrow \quad e^{2x} + e^x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad e^x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (5)

$e^x > 0$ බැවින්, $(-)$ ලකුණ ගත නොහැක.

$\therefore \quad e^x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (5)

$\therefore \quad x = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$ (5)

දෙන ලද සමීකරණය මෙම x අගය තෘප්ත කරයි.

35

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) විභාගය - 2021 (2022)

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

II පත්‍රය

A කොටස	**10 x 25**	**=**	**250**
B කොටස	**05 x 150**	**=**	**750**

එකතුව $= \dfrac{1000}{10}$

II පත්‍රය අවසාන ලකුණු = 100

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.

2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.

3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.

4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමග □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) ....
....
....   √   △ $\frac{4}{5}$

(ii) ....
....
....   √   △ $\frac{3}{5}$

(iii) ....
....
....   √   △ $\frac{3}{5}$

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.

2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

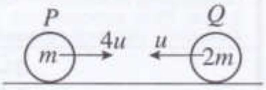
4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

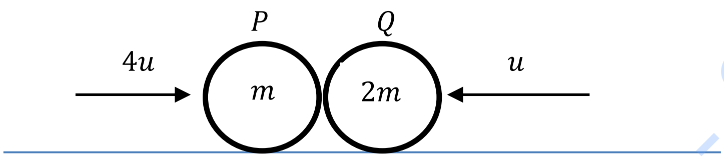
ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

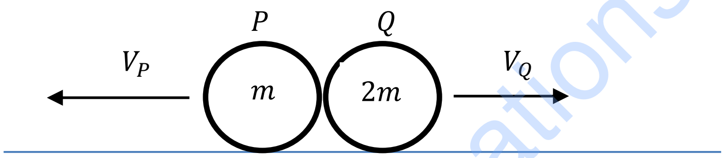
සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

1. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය $2m$ වූ Q අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිළිවෙළින් $4u$ හා u වේගවලින් එකිනෙක දෙසට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{4}{5}$ වේ. ගැටුමෙන් පසු P හා Q අංශු එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට චලනය වන බව පෙන්වන්න.
ගැටුමෙන් පසු P හා Q එකිනෙකට a දුරකින් පිහිටීම සඳහා ගතවන කාලය සොයන්න.







පද්ධතිය සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{V})$

$$0 = (2mV_Q - mV_P) - (4mu - 2mu)$$ (5)

P හා Q සඳහා $I = \Delta(m\underline{v})$

$$\Longrightarrow 2V_Q - V_P = 2u \quad \text{--- (1)}$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමයෙන්,

$$V_Q + V_P = \frac{4}{5}(4u + u)$$ (5)

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය

$$V_Q + V_P = 4u \quad \text{--- (2)}$$

: $V_Q = 2u$ හා $V_P = 2u.$ (5)

V_p හා V_Q දෙකම සඳහා

(1) + (2) : $V_Q > 0$ හා $V_P > 0.$

∴ P හා Q ගැටුමෙන් පසු ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශා වලට චලනය වේ. (5)

$V_p > 0$ හා $V_Q > 0$ දෙකම සඳහා හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශන සඳහා

$$\underline{V}(P,Q) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,Q)$$

$$= \overleftarrow{2u} + \overleftarrow{2u}$$

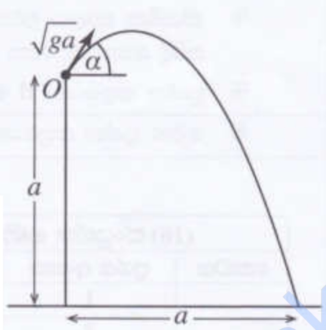
$$= 4u \longleftarrow$$

අවශ්‍ය කාලය $= \frac{a}{4u}.$ (5)

$\frac{a}{4u}$ තිබීම.

25

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තිරස් ගෙබිමක සිට a සිරස් දුරකින් වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට $\sqrt{ga}$ ආරම්භක ප්‍රවේගයකින් හා තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව, O සිට a තිරස් දුරකින් ගෙබිම හා ගැටේ. $\tan\alpha = 1+\sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.



From O to A $S = ut + \frac{1}{2}at^2$:

$\rightarrow \quad a = \sqrt{ga}\cos\alpha \; t$ -------------------- (1) **5**

$\rightarrow s = u + \frac{1}{2}at^2$

$\uparrow \quad -a = \sqrt{ga}\,\sin\alpha \; t - \frac{1}{2}gt^2$ -------------------- (2) **5**

$\uparrow s = u + \frac{1}{2}at^2$

(1) මගින්, $t = \frac{a}{\sqrt{ga}\cos\alpha}$.

(2) මගින්, $-a = a\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{a^2}{ga\,cos^2(\alpha)}$.

$\therefore \quad -2 = 2\tan\alpha - (1+tan^2\alpha)$. **5**

tan α හි වර්ගජ සමීකරණය සඳහා

එනම්, $tan^2\alpha - 2\tan\alpha - 1 = 0$.

$\therefore \tan\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = 1\pm\sqrt{2}$ **5**

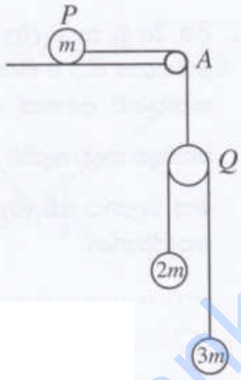
$\pm$ දෙකම

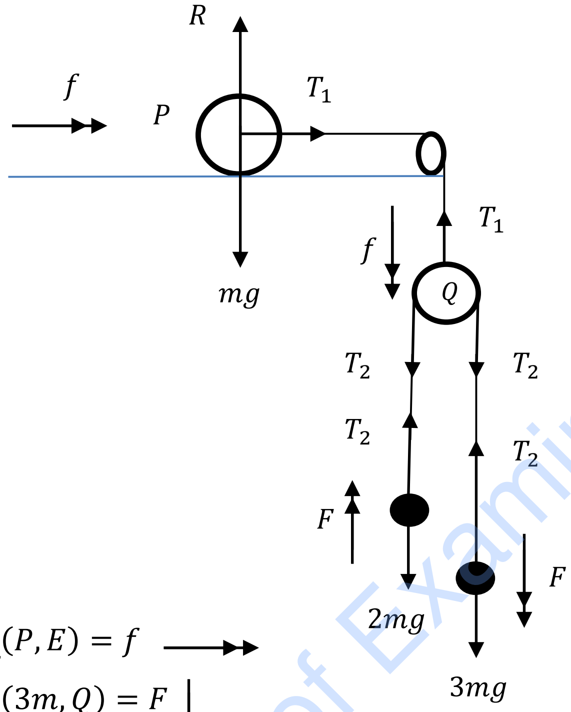
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ බැවින් $(-)$ ලකුණ ගත නොහැක.

$\therefore \tan\alpha = 1+\sqrt{2}$. **5**

නිවැරදි ලකුණ තෝරා ගැනීම

3. සුමට තිරස් මේසයක් මත ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තබා, එය මේසයේ දාරයෙහි වූ A ලක්ෂ්‍යයෙහි ඇති අචල කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සුමට සැහැල්ලු Q කප්පියකට සම්බන්ධ කර ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, Q කප්පිය මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ස්කන්ධ $2m$ හා $3m$ වන අංශු සම්බන්ධ කර ඇත. අංශු හා තන්තු සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තු තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. Q හි ත්වරණය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.





(5)

f → , f ↓

$\underline{a}(P, E) = f \rightarrow$

$\underline{a}(3m, Q) = F \downarrow$

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීම;

(P) $\rightarrow$ $T_1 = mf$ (5)

(Q) $\downarrow$ $2T_2 - T_1 = 0$ (5)

(2m) $\uparrow$ $T_2 - 2mg = 2m(F - f)$ (5)

(3m) $\downarrow$ $3mg - T_2 = 3m(F + f)$ (5)

හෝ

(Q) (2m) හා (3m) $\downarrow$ $T_1 - 2mg - 3mg = 2m(f - F) - 3m(f + F)$

සටහන: ඕනෑම ස්වායක්ත සමීකරණ 4කට (20)

P සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

Q සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

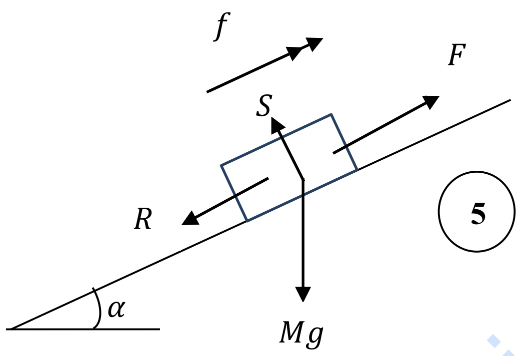
$2m$ සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

$3m$ සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

Q, $2m$ හා $2m$ සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$

25

4. ස්කන්ධය M kg වූ කාරයක් තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{1}{20}\right)$ ක ආනතියක් සහිත සෘජු මාර්ගයක් දිගේ ඉහළට නියත ත්වරණයකින් ගමන් කරයි. එහි චලිතයට R N නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. එහි වේගය 36 km h^{-1} සිට 72 km h^{-} දක්වා වැඩි කිරීමට කාරය ගමන් කළ දුර 500 m වේ. එහි වේගය 54 km h^{-1} වන විටදී කාරය යෙදූ ජව නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



5

S ඇතිව හෝ නොමැතිව බල ලකුණු කිරීම සඳහා

$$\sin\alpha = \frac{1}{20}$$

$$\frac{36 \times 1000}{3600} = 10\ ms^{-1}$$

$$\frac{72 \times 1000}{3600} = 20\ ms^{-1}$$ 5

$$\frac{54 \times 1000}{3600} = 15\ ms^{-1}$$

වේග තුනෙහිම පරිවර්තන සඳහා

$\nearrow$ $v^2 = u^2 + 2as$:

$20^2 = 10^2 + 2f(500)$ 5

$f = \frac{150}{500} = \frac{3}{10} ms^{-2}$

$v^2 = u^2 + 2as \nearrow$ යෙදීම

$\nearrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$:

$F - R - Mg\sin\alpha = Mf$ 5

$\underline{F} = m\underline{a}$ $\nearrow$ යෙදීම

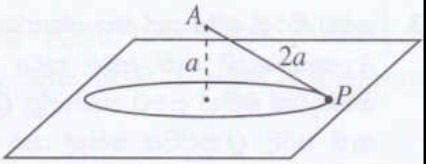
$P = F \cdot V$

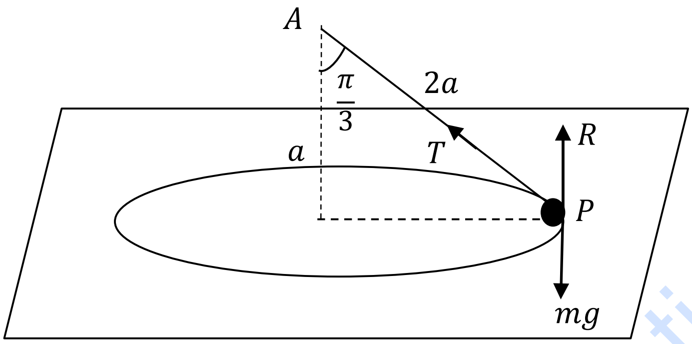
$= F \cdot 15$ 5

$P = F \cdot 15$ යෙදීම

25

5. දිග $2a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක කෙළවරක් සුමට තිරස් මේසයක සිට a සිරස් දුරක් ඉහළින් වූ A අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. තන්තුවේ අනෙක් කෙළවරට ඈඳා ඇති ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, තන්තුව තදව ඇතිව $\sqrt{\frac{ga}{2}}$ ඒකාකාර වේගයෙන් තිරස් වෘත්තයක මේසය මත චලනය වේ (රූපය බලන්න). මේසය මගින් P මත ඇති කරන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{5}{6}mg$ බව පෙන්වන්න.





(5) බල සඳහා

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්:

$\leftarrow T\sin\frac{\pi}{3} = m.\frac{ga}{2(2a\sin\frac{\pi}{3})}$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a}$ ←

$\therefore T = \frac{mg}{3}.$ (5)

$T = \frac{mg}{3}$ තිබීම

$\uparrow\ R - mg + T\cos\frac{\pi}{3} = 0$ (5)

$\underline{F} = m\underline{a}$ ↑

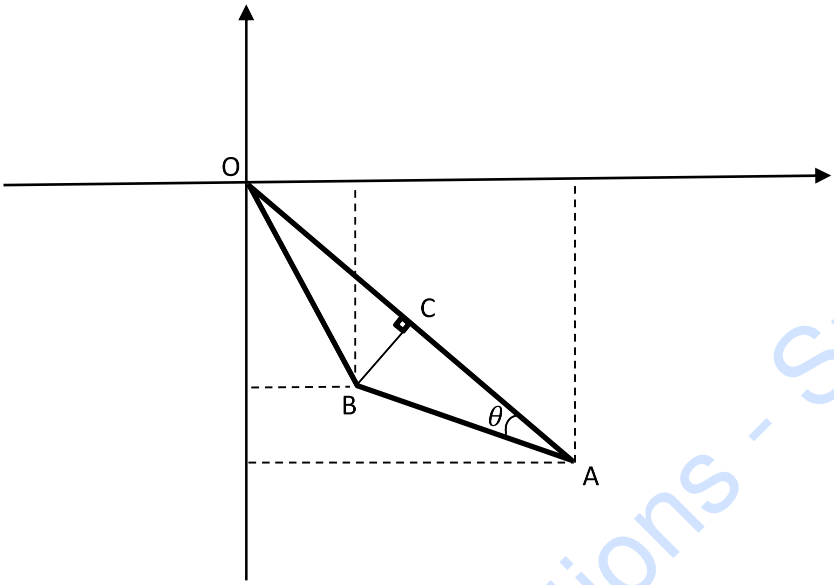
$\therefore R = mg - \frac{mg}{6}$

$= \frac{5}{6}mg$ (5)

පිළිතුර සඳහා පියවර

25

6. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ වේ. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ භාවිතයෙන්, $O\hat{A}B$ සොයන්න.
C යනු OA මත $O\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ සොයන්න.



$\overrightarrow{OA} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{i} - 2\underline{j}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = -2\underline{i} + 3\underline{j}$ හා

$\overrightarrow{AB} = (\underline{i} - 2\underline{j}) - (2\underline{i} - 3\underline{j})$ (5)

$= -\underline{i} + \underline{j}$

$\underline{i}$ හා $\underline{j}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}| \cos\theta$ (5)

$2 + 3 = \sqrt{13}\sqrt{2} \cos\theta$

$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ අර්ථ දැක්වීම හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$\therefore \quad \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ (5)

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$ තිබීම

$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA}$, මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$, හා $\overrightarrow{CB} = (\underline{i} - 2\underline{j}) - \lambda(2\underline{i} - 3\underline{j})$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ gives as $2(1 - 2\lambda) - 3(-2 + 3\lambda) = 0$ (5)

තිත් ගුණිතය භාවිතයෙන් $\overset{\Lambda}{OCB} = \frac{\pi}{2}$ අවශ්‍යතාවයට

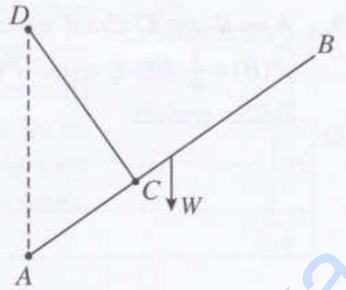
$\therefore \quad \lambda = \frac{8}{13}$ (5)

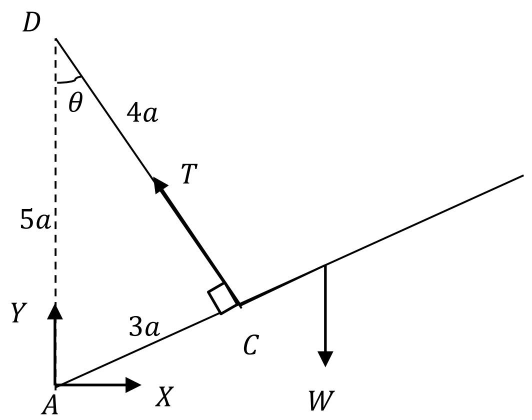
λ හි අගය හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

හා $\quad \overrightarrow{OC} = \frac{8}{13}(2\underline{i} - 3\underline{j})$

25

7. දිග $8a$ හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක, එහි A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසව් කර ඇත. දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් දණ්ඩ මත $AC = 3a$ වන පරිදි වූ C ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර A ට සිරස්ව ඉහළින් $AD = 5a$ වන පරිදි වූ D අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත (රූපය බලන්න). දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ පවතී. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{16}{15}W$ බව පෙන්වන්න.
A හි ප්‍රතික්‍රියාවේ තිරස් සංරචකය ද සොයන්න.





(5) බල සඳහා

$A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$ (5) — $A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$; තිබීම

දණ්ඩේ සමතුලිතතාවය සඳහා:

$\overset{\curvearrowright}{A}$ $\quad W \times 4a\cos\theta - T \times 3a = 0$ (5) — T සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණයක් සඳහා

$$\therefore T = \frac{4W}{3}\cos\theta$$

$$= \frac{4W}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{16W}{15}$$ (5) — පිළිතුර සඳහා පියවර

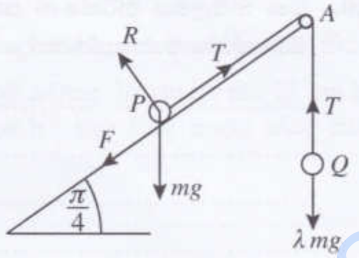
$\rightarrow \quad X = T\sin\theta$

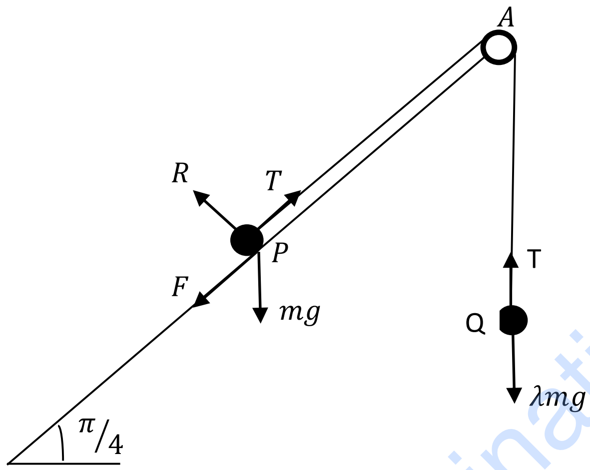
$$= \frac{16W}{15} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{16W}{25}$$ (5) — $\frac{16W}{25}$ තිබීම

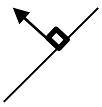
25

8. තිරසට $\frac{\pi}{4}$ කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් තබා ඇත. රූපයෙහි දක්වා ඇති පරිදි, ආනත තලයේ දාරයට A හි දී සවිකර ඇති අචල කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් P අංශුවට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය λmg වූ Q අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. PA රේඛාව, ආනත තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර තන්තුව තදව ඇතිව P හා Q අංශු දෙක සමතුලිතතාවයේ පවතී. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න. (අදාළ බල රූපයෙහි ලකුණු කර ඇත.)





For the equilibrium:

(P) 

$$R - mg\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \quad R = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$

R හි අගය ලබා ගැනීමට සමීකරණයක් සඳහා

(Q) 

$$T - \lambda mg = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \quad T = \lambda mg$$

T හි අගය ලබා ගැනීමට සමීකරණයක් සඳහා

(P) 

$$T - F - mg\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\therefore \quad F = \lambda mg - \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\lambda - 1)$$

F හි අගය ලබා ගැනීමට සමීකරණයක් සඳහා

P හි සමතුලිතතාවය සඳහා

$$\frac{1}{2} \geq \frac{|F|}{R} \quad (5)$$

ලිස්සා නොයෑමට, මාපාංකය සහිත අවශ්‍යතාවයට

$$\therefore \quad |\sqrt{2}\lambda - 1| \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \lambda \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

පිළිතුර සඳහා පියවර

25

9. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක **ස්වායත්ත** සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P(A)=\frac{1}{5}$ හා $P(B)=\frac{3}{4}$ බව දී ඇත. $P(A\cup B)$, $P(A|A\cup B)$ හා $P(B|A')$ සොයන්න; මෙහි A' මගින් A හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{3}{4}$

A හා B ස්වායත්ත නිසා,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (5) — ස්වායත්තතාව සඳහා අවශ්‍යතාවය

$= \frac{3}{20}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (5) — $P(A\cup B)$ සඳහා සමීකරණය

$= \frac{1}{5} + \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{4}{5}$

$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$ (5) — $\frac{1}{4}$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')}$

$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{20} = \frac{3}{5}$ (5) — $\frac{3}{5}$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

(හෝ $P(B \cap A') = P(B) \cdot P(A') = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$)

$P(B|A') = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$ (5) — $\frac{3}{4}$ හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

25

10. ධන නිඛිලමය නිරීක්ෂණ පහක කුලකයක මධ්‍යන්‍යය 6 ද පරාසය 10 ද වේ. එයට මාතයන් දෙකක් ඇත. මධ්‍යස්ථය, මාතයන්ගෙන් වෙනස් වේ නම්, නිරීක්ෂණ පහ සොයන්න.

සංඛ්‍යා ආරෝහණ පිළිවෙලට යැයි ගනිමු.

a, a, b, c, c

පරාසය 10 නිසා $c - a = 10$. **(5)** — පරාසය සඳහා අවශ්‍යතාවය

$\therefore c = a + 10$ ——— (1)

මධ්‍යන්‍යය 6 නිසා, $\frac{2a+b+2c}{5} = 6$. ——— (2) **(5)** — මෙය සඳහා හෝ තුල්‍ය ප්‍රකාශනයකට

(1) හා (2)මගින් $4a + b + 20 = 30$

එනම්, $4a + b = 10$ ——— (3) **(5)** — නිරීක්ෂණ නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණයකට

a හා b මත නිඛිල නිසා,

එවිට, (3) මගින් $4a \leq 9$ හා

a සඳහා ගත හැකි අගයන් 1 හා 2 ලැබේ.

$a = 1$ නම්, එවිට $b = 6$.

$a = 2$ නම් එවිට, $b = 2$, හා මධ්‍යන්‍යය, මාතයන්ගෙන් වෙනස් නිසා මෙය විය නොහැක. **(5)** — මධ්‍යන්‍යය $\neq$ මාතයන් යෙදීමට

$\therefore$ සංඛ්‍යා $1, 1, 6, 11, 11$ වේ. **(5)** — 1, 1, 6, 11, 11 තිබීම.

25

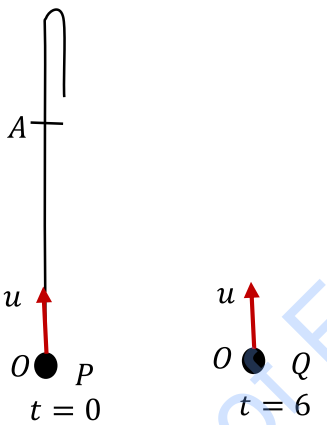
11.(a) P අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට සිරස්ව උඩු අතට $u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබ තත්පර 4 කට පසුව A ලක්ෂ්‍යයක් වෙත ළඟා වන අතර, තවත් තත්පර 2 කට පසුව නැවත A වෙත පැමිණෙයි. P අංශුව දෙවනවරට A හි ඇති මොහොතේදී තවත් Q අංශුවක් O හි සිට සිරස්ව උඩු අතට එම $u\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ප්‍රවේගයෙන්ම ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. එකම රූපසටහනක, P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින්, g ඇසුරෙන් u හි අගය ද OA හි උස ද, P සමග ගැටීමට Q ගන්නා කාලය ද සොයන්න.

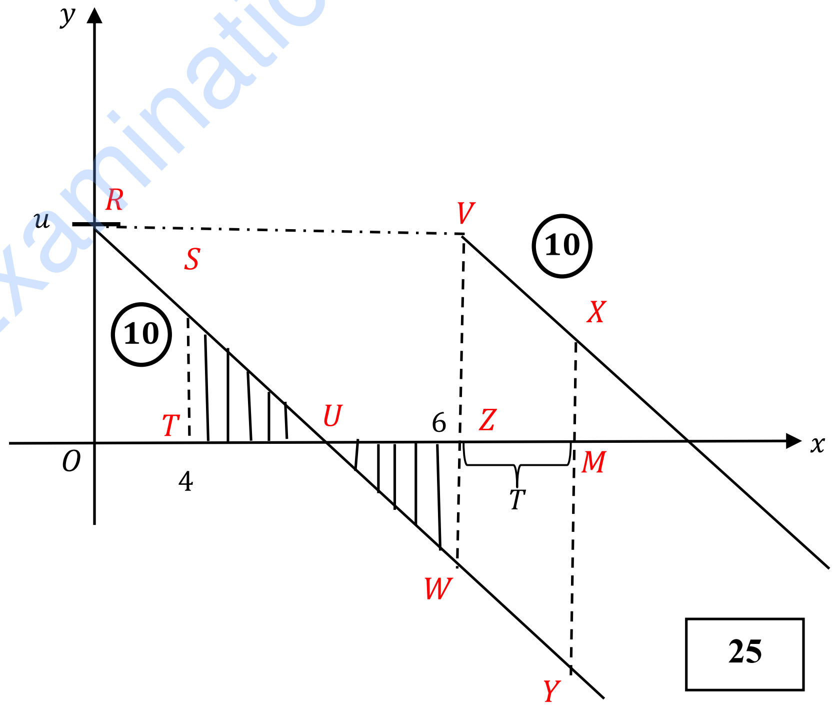
(b) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $u\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ ඒකාකාර වේගයෙන් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතකදී, S වලින් d km දුරක් නැගෙනහිරින් P බෝට්ටුවක් පිහිටන අතර S වලින් $\sqrt{3}\,d$ km දුරක් දකුණෙන් වෙනත් Q බෝට්ටුවක් පිහිටයි. P බෝට්ටුව, පොළොවට සාපේක්ෂව $2u\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ ක ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක, S අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරන අතර Q බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $3u\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක P අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරයි.

(i) P බෝට්ටුවට, S නැව අල්ලා ගැනීමට ගතවන කාලය $\dfrac{d}{\sqrt{3}u}$ h බව ද

(ii) Q බෝට්ටුව P බෝට්ටුව අල්ලා ගැනීමට පෙර P බෝට්ටුව S නැව අල්ලා ගන්නා බව ද පෙන්වන්න.

(a)





25

STU ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $=$ UZW ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය නිසා

$TU = UZ.$

$TZ = 2 \Longrightarrow TU = 1.$ (5)

$\therefore OU = 5.$ (5)

ROU ත්‍රිකෝණයෙන් $g = \frac{u}{5}$.

$\therefore u = 5g$. (5)

STU ත්‍රිකෝණයෙන්, $g = \frac{ST}{1} = ST$. (5)

OA හි උස $=$ $ORST$ හි වර්ගඵලය

$= \frac{1}{2}(OR + ST) \times OT$ (5)

$= \frac{1}{2}(u + g) \times 4$ (5)

$= \frac{1}{2} \times 6g \times 4$

$= 12g$ (5)

P සමග ගැටීමට Q ගන්නා කාලය T යැයි ගනිමු.

$OA =$ $VZMX$ වර්ගඵලය $+$ $WZMY$ වර්ගඵලය

$=$ $VWYX$ වර්ගඵලය (10)

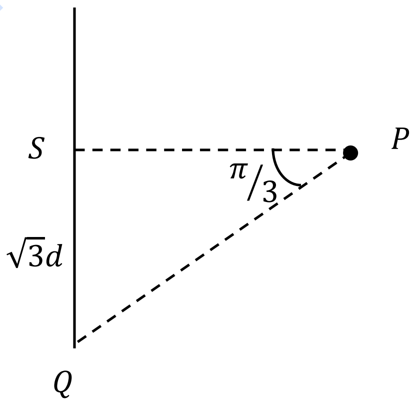
$= \frac{1}{2}(VW + XT) \times ZM$

$\therefore 12g = \frac{1}{2}(6g + 6g) \times T$ (10)

$\therefore T = 2$ sec. (5)

60

(b)

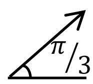


$\underline{V}(S, E) = \uparrow u$

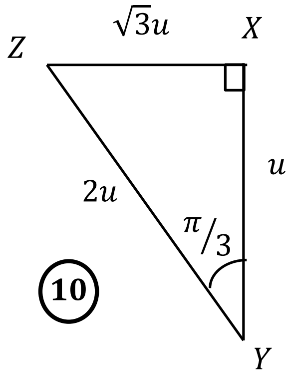
$\underline{V}(P, E) = 2u$

$\underline{V}(Q, E) = 3u$

$\underline{V}(P, S) = \leftarrow$

$\underline{V}(Q, P) =$ 

(i)



(10)

$\underline{V}(P,S) = \underline{V}(P,E) + \underline{V}(E,S)$ (5) + (5)

$= \underline{V}(E,S) + \underline{V}(P,E)$

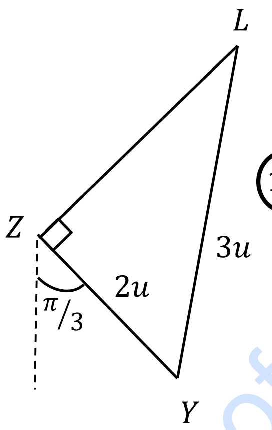
$= \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$

$= \overrightarrow{XZ}$

අවශ්‍ය කාලය $= \dfrac{d}{XZ} = \dfrac{d}{\sqrt{3}u}\, h.$ (5)

25

(ii)



(10)

$\underline{V}(Q,P) = \underline{V}(Q,E) + \underline{V}(E,P)$ (5)

$= \underline{V}(E,P) + \underline{V}(Q,E)$

$= \overrightarrow{ZY} + \overrightarrow{YL}$

$= \overrightarrow{ZL}$

$ZL = \sqrt{(3u)^2 - (2u)^2} = \sqrt{5}u$ (5)

P හමුවීමට Q ගන්නා කාලය t_2 යැයි ගනිමු.

එවිට, $t_2 = \dfrac{\sqrt{3}\, d \sec(\pi/_6)}{\sqrt{5}\, u}$

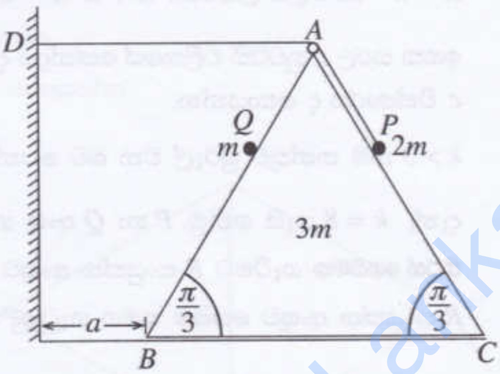
$= \dfrac{2d}{\sqrt{5}\, u} h.$ (10)

$\therefore\ t_1 < t_2.$ (10)

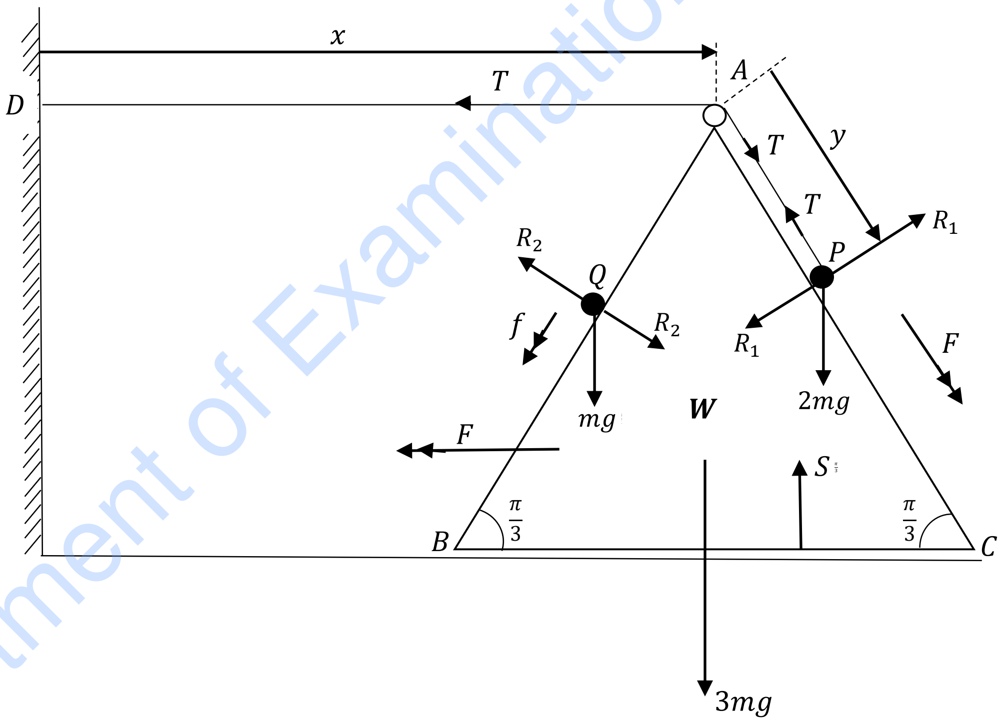
70

---

12. (*a*) රූපයෙහි ABC සමපාද ත්‍රිකෝණය, $AB = BC = AC = 6a$ ද වන, BC අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබන ලද ස්කන්ධය $3m$ වන සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩ වේ. AB හා AC රේඛා, ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. D ලක්ෂ්‍යය, AD තිරස් වන පරිදි ABC තලයෙහි කුඤ්ඤයෙහි B ලක්ෂ්‍යයෙහි සිට a දුරකින් වූ සිරස් බිත්තිය මත වූ අචල ලක්ෂ්‍යයකි. A හි සවිකර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන දිග $5a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් AC මත තැබූ ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර බිත්තිය මත වූ අචල D ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක් AB මත අල්වා තබා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, $AP = AQ = a$ ලෙස ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. කුඤ්ඤය බිත්තියෙහි ගැටෙන මොහොතෙහිදී කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව Q හි ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.



a)



$x + y =$ නියතයකි (5)

$\therefore \ddot{x} + \ddot{y} = 0$ ________________ (1) (5)

$\underline{a}(W, E) = F \twoheadleftarrow$ යැයි ගනිමු.

$\therefore$ $\underline{a}(P, W) = F$ ↘ ((1) මගින්) (5)

$\underline{a}(Q, W) = f$ ↙ යැයි ගනිමු.

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්:

(5) (බල සඳහා) (5) (ත්වරණ සඳහා)

(P) ↘ $2mg\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - T = 2m\left(F - F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (5) (සමීකරණයට)

(Q) ↙ $mg\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\left(f + F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (5) (සමීකරණයට)

(5) (5)

$(P, Q$ හා $W)$ පද්ධතිය සඳහා, ←

$T = 3mF + 2m\left(F - F\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + m\left(F + f\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (5) (සමීකරණයට)

(5) (5) (5) (5)

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්:

← (W) $a = \frac{1}{2}Ft^2$ (5)

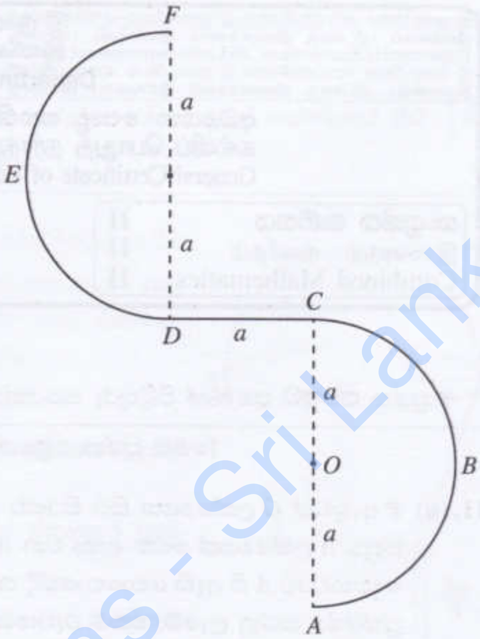
$v = u + at$ යෙදීමෙන්:

$v = ft$ (5)

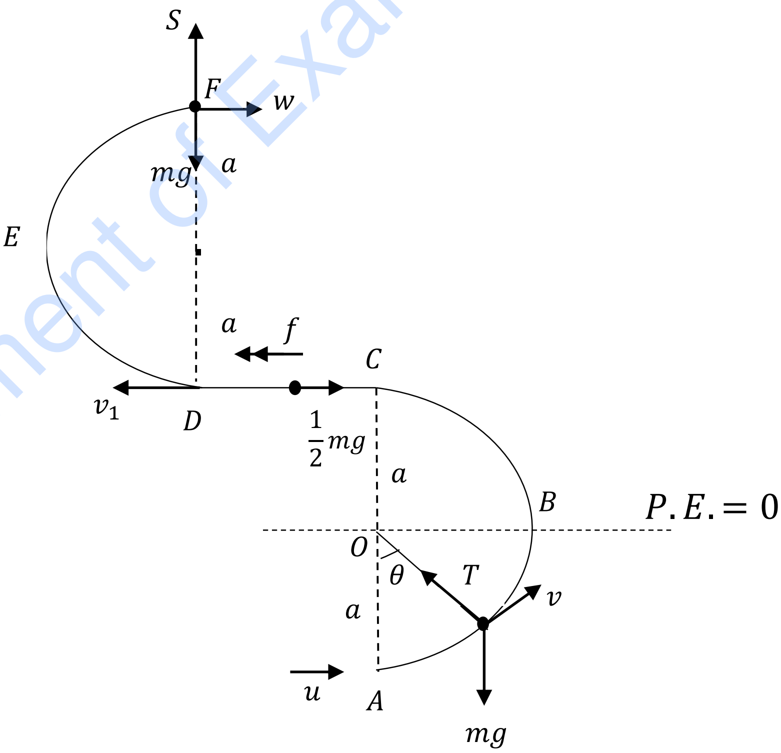
80

(*b*) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, $ABCDEF$ තුනී කම්බියක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. ABC කොටස, කේන්ද්‍රය O හා අරය a වූ තුනී **සුමට** අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක් වේ. CD කොටස, දිග a වූ තුනී **රළු** තිරස් කම්බියක් වේ. DEF කොටස ද අරය a වූ තුනී **සුමට** අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක් වේ. AC හා DF විෂ්කම්භ සිරස් වේ. ස්කන්ධය m වූ කුඩා සුමට P පබළුවක් A හි තබා තිරස්ව $u\left(>3\sqrt{ag}\right)$ ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර එය කම්බිය දිගේ චලිතය ආරම්භ කරයි. පබළුවෙහි C සිට D දක්වා චලිතය තුළ පබළුව මත කම්බිය මගින් ඇති කරන ඝර්ෂණ බලයේ විශාලත්වය $\frac{1}{2}mg$ බව දී ඇත. P පබළුවෙහි A සිට C දක්වා චලිතය තුළ $\overrightarrow{OA}$ සමග $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ කෝණයක් $\overrightarrow{OP}$ සාදන විට එහි v වේගය $v^2 = u^2 - 2ag(1 - \cos\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

F හිදී කම්බිය හැරයාමට මොහොතකට පෙර P පබළුවේ w වේගය $w^2 = u^2 - 9ag$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, එම මොහොතේදී කම්බිය මගින් P පබළුව මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



b)



ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}mv^2 - mga\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 - mga$$ (15)

PE (5) + KE (5) + සමීකරණය (5)

$$\therefore \quad v^2 = u^2 - 2ga(1-\cos\theta)$$ (5)

$\theta = \pi$ විට, $v^2 = u^2 - 4ga$ ______________ (1) (5)

25

C සිට D දක්වා, $\leftarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$:

$$-\frac{1}{2}mg = mf$$ (5)

$$\therefore \quad f = -\frac{g}{2}$$ (5)

$\leftarrow$ $v^2 = u^2 + 2as$: $v_1{}^2 = (u^2 - 4ga) - 2\cdot\frac{g}{2}a$

$$= u^2 - 5ga.$$ (10)

(1) භාවිතයෙන්, $v_2{}^2 = v_1{}^2 - 4ga$ (10)

$$= u^2 - 9ga.$$ (5)

F හිදී: $\underline{F} = m\underline{a}$ $\downarrow$

$$mg - S = m\frac{v_2{}^2}{a}$$ (5)

$$\therefore \quad S = mg - \frac{m}{a}(u^2 - 9ga)$$ (5)

$$= \frac{m}{a}(10ag - u^2)$$ (5)

70

---

13. ස්වභාවික දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව O ට $5a$ දුරක් පහළින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ බව පෙන්වන්න.

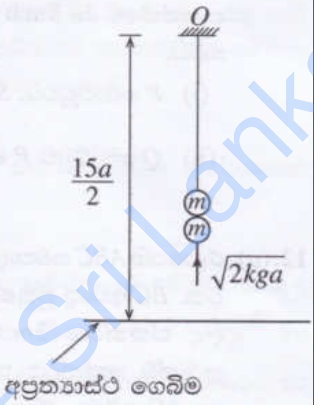
දැන්, ස්කන්ධය m වූ වෙනත් Q අංශුවක් සිරස්ව ඉහළට ගමන් කර P සමග ගැටී හාවී R සංයුක්ත අංශුවක් සාදයි. P අංශුව සමග ගැටීමට මොහොතකට පෙර Q අංශුවේ වේගය $\sqrt{2kga}$ වේ. R චලිතවීමට පටන් ගන්නා ප්‍රවේගය සොයන්න.

තන්තුව නොබුරුල්ව ඇතිව පසුව සිදුවන චලිතයේදී R සංයුක්ත අංශුවට O සිට දුර වන x යන්න $\ddot{x}+\frac{g}{2a}(x-6a)=0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$X = x - 6a$ ලෙස ලියමින්, $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$ වේ.

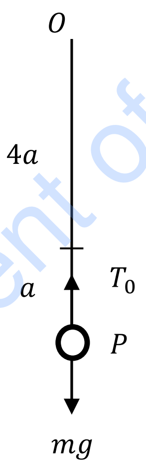
ඉහත සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය ද, $\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් c විස්තාරය ද සොයන්න.

$k > 3$ නම් තන්තුව බුරුල් වන බව පෙන්වන්න.



දැන්, $k = 8$ යැයි ගනිමු. P හා Q අංශු හාවූ මොහොතේ සිට O ලක්ෂ්‍යයට $\frac{15}{2}a$ දුරක් පහළින් වූ **අප්‍රත්‍යාස්ථ තිරස් ගෙබිමක** ගැටීමට R සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය සොයන්න.

R සංයුක්ත අංශුව ගෙබිම සමග ගැටුණු පසු ළඟා වන උපරිම උස ද සොයන්න.



P හිදී සමතුලිතතාවය සඳහා,

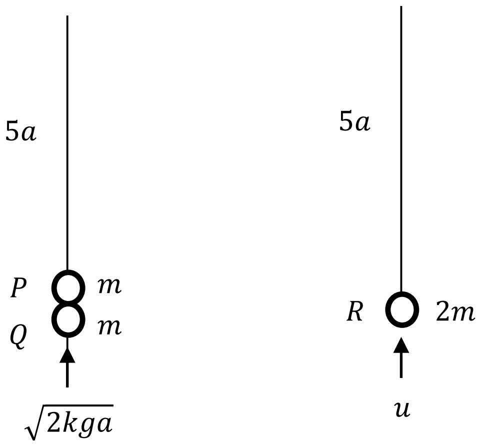
$T_0 = mg$ (5)

$T_0 = \frac{\lambda a}{4a} = \frac{\lambda}{4}$ (5)

$\therefore \lambda = 4mg$

(5)

15

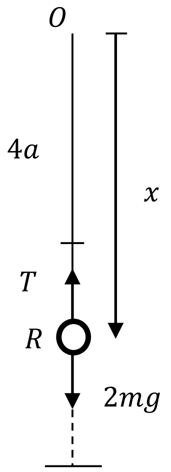


P හා Q සඳහා $\underline{I} = \triangle (m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

$\uparrow \; 0 = 2mu - m\sqrt{2kga}$ (5)

$\therefore u = \sqrt{\dfrac{kga}{2}}$ (5)

10



R සඳහා $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$\uparrow \; T - 2mg = -2m\ddot{x}$ (10)

$T = 4mg\dfrac{(x-4a)}{4a}$ (5)

$\therefore \dfrac{mg}{a}(x-4a) - 2mg = -2m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \dfrac{g}{2a}(x-6a) = 0$ ________(1) (5)

20

$X = x - 6a$

$\therefore \dot{X} = \dot{x}$

$\therefore \ddot{X} = \ddot{x}$ (5)

එවිට (1) $\Rightarrow \quad \ddot{X} + \omega^2 X = 0$; මෙහි $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2a}}$. (5)

10

කේන්ද්‍රය $X = 0$ මඟින් දෙනු ලැබේ.

එනම්, $x = 6a$. (5)

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$_________(2)

$x = 5a$ විට, $X = -a$ හා $\dot{X} = -\frac{1}{2}\sqrt{2kga}$. (5)

එවිට $(2) \Rightarrow \frac{kga}{2} = \frac{g}{2a}(c^2 - a^2)$.

$\Rightarrow ka^2 = c^2 - a^2$.

$\Rightarrow c = \sqrt{k+1}\, a$. (5)

15

$k > 3$ යැයි ගනිමු. එවිට, $c > 2a$.

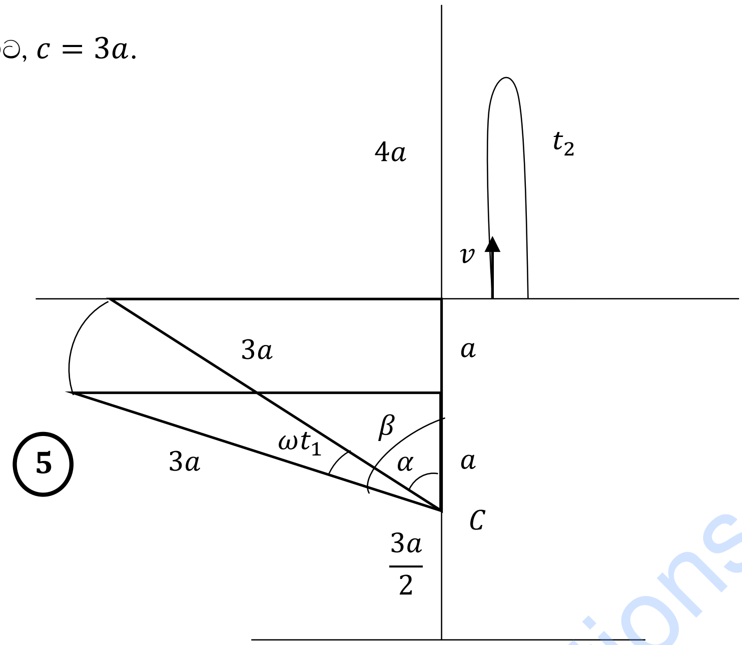
$\therefore$ විස්තාරය $> 2a$. (5)

$\therefore$ තන්තුව බුරුල් වේ. (5)

10

$\boxed{k = 8}$

එවිට, $c = 3a.$



$\cos\beta = \dfrac{1}{3}$ (5)

$\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ (5)

$\omega t_1 = \beta - \alpha$

$\therefore\ t_1 = \dfrac{1}{\omega}(\beta - \alpha)$ (5)

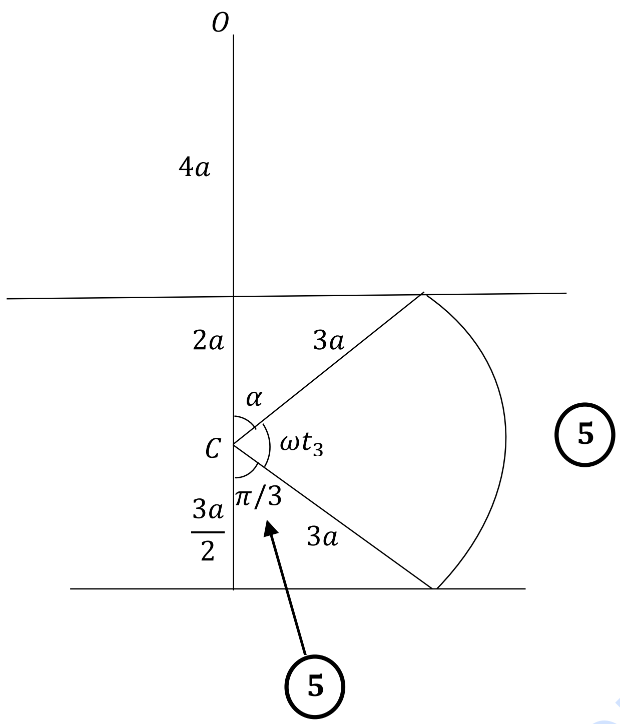
දැන්, $v^2 = \frac{g}{2a}(9a^2 - 4a^2)$

$\therefore v = \sqrt{\dfrac{5}{2}ga}$ (5)

ගුරුත්වය යටතේ: $\uparrow$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$0 = vt_2 - \frac{1}{2}g{t_2}^2.$ (5)

$\therefore\ t_2 = \dfrac{2v}{g} = \dfrac{2}{g}\sqrt{\dfrac{5}{2}ga} = \sqrt{\dfrac{10a}{g}}$ (5)



$$\omega t_3 = \frac{2\pi}{3} - \alpha$$ (5)

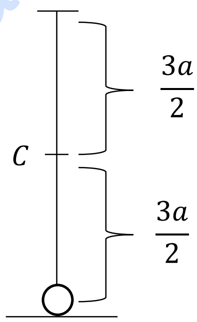
$$\therefore\ t_3 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

∴ අවශ්‍ය කාලය $= t_1 + t_2 + t_3$

$$= \frac{1}{\omega}(\beta - \alpha) + \sqrt{\frac{10a}{g}} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$= \sqrt{\frac{10a}{g}} + \sqrt{\frac{2a}{g}}\left\{\frac{2\pi}{3} + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - 2\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$$ (10)

60



ගෙබිමෙහි ගැටීමෙන් පසු, R සරල අනුවර්තී චලිතයේ පමණක් යෙදේ. (5)

$$\therefore \text{ උපරිම උස } = \frac{3a}{2} + \frac{3a}{2}$$

$$= 3a$$ (5)

10

14.(a) **a** හා **b** ශුන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික යැයි ද $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු.
$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ නම්, $\lambda = 0$ හා $\mu = 0$ බව පෙන්වන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E ද වේ. AE (දික්කළ) හා BC රේඛා F හි දී හමුවේ. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ හා $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ යැයි ගනිමු. ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන් $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}{4}$ බව පෙන්වන්න.
$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ වන්නේ ඇයි දැයි පැහැදිලි කරන්න; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ.
ACF ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $(\alpha - 4\beta)\mathbf{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\mathbf{b} = \mathbf{0}$ බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින්, α හා β හි අගයන් සොයන්න.

(b) ABC යනු පැත්තක දිග $2a$ වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D, E, F යනු පිළිවෙළින් AB, BC හා AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. විශාලත්ව $2P, \sqrt{3}P, 2\sqrt{3}P$ හා αP වූ බල පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}$ හා $\overrightarrow{BC}$ දිගේ ක්‍රියාකරයි. මෙම බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය, $\overrightarrow{AC}$ ට සමාන්තරව ක්‍රියාකරන බව දී ඇත. α හි අගය සොයන්න.
බල පද්ධතිය, A හරහා ක්‍රියාකරන විශාලත්වය R වූ තනි බලයකට හා විශාලත්වය G වූ යුග්මයක් සමගින් තුල්‍ය වේ. R හා G හි අගයන් සොයන්න.
මෙම බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව ලියා දක්වා සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව AB හමුවන ලක්ෂ්‍යයට A හි සිට ඇති දුර සොයන්න.
දැන්, විශාලත්වය H වූ යුග්මයක් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. මෙම අලුත් පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තය B ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි. H හි අගය හා මෙම යුග්මය ක්‍රියාකරන අත සොයන්න.

(a)

$\underline{a}, \underline{b} \neq \underline{0}$ and $\underline{a} \nparallel \underline{b}$

$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$ ________(1)

If $\lambda \neq 0$ නම්, එවිට $\underline{a} = -\dfrac{\mu}{\lambda}\underline{b}$. (5)

මෙය දෙන ලද අවශ්‍යතාවට පරස්පර වේ.

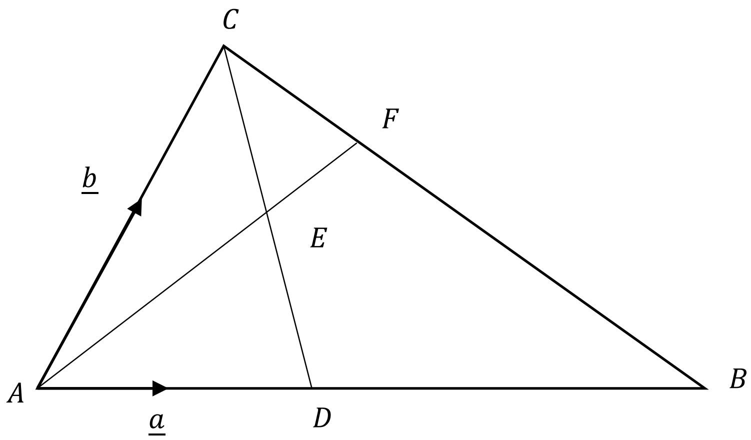
$\therefore\ \lambda = 0.$ (5)

දැන්, (1) මඟින් $\mu\underline{b} = \underline{0}$ ලැබේ.

$\underline{b} \neq \underline{0}$ නිසා, $\mu = 0$ (5)

$\therefore\ \lambda = 0$ හා $\mu = 0$

15



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ (5)

$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (5)

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$ (5)

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}\right)$

$= \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}.$ (5)

20

$AF \parallel AE$ (හෝ A, E, F ඒක රේඛීය වේ) (5)

$CF \parallel CB$ (හෝ C, F, B ඒක රේඛීය වේ) (5)

10

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ (5)

$\therefore \alpha\overrightarrow{AE} = \underline{b} + \beta\overrightarrow{CB}$

$\therefore \alpha\left(\frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{4}\right) = \underline{b} + \beta\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)$ (5)

$\therefore\ \alpha\underline{a} + 2\alpha\underline{b} = 4\underline{b} + 4\beta(-\underline{b} + \underline{a})$

$\therefore (\alpha - 4\beta)\underline{a} + (2\alpha + 4\beta - 4)\underline{b} = \underline{0}$ (5)

$\underline{a}, \underline{b} \neq 0$ හා $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ මගින්,

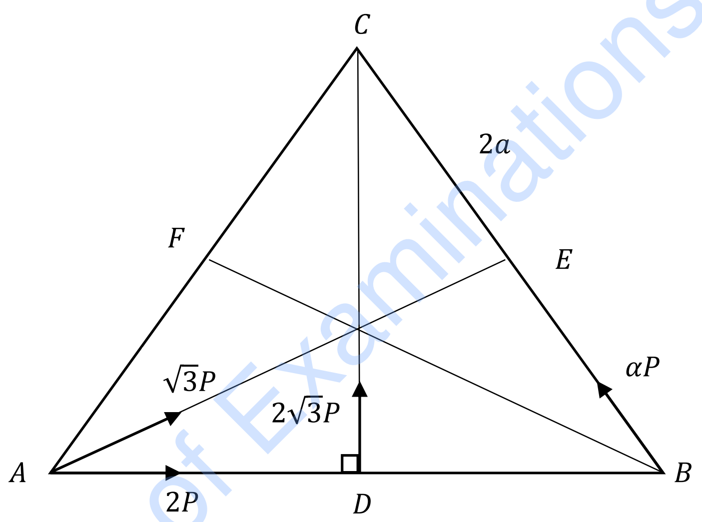
$\alpha - 4\beta = 0$ හෝ $2\alpha + 4\beta - 4 = 0$ ලැබේ.

$\therefore\ \alpha = \frac{4}{3}$ හා $\beta = \frac{1}{3}$

(5) (5)

25

(b)



$\rightarrow X = 2P + \sqrt{3}P\cos\frac{\pi}{6} - \alpha P\cos\frac{\pi}{3}$ (5)

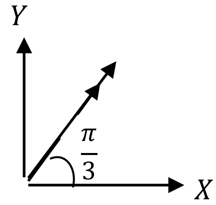
$= 2P + \frac{3P}{2} - \frac{\alpha P}{2}$

$= \frac{1}{2}(7 - \alpha)P$

$\uparrow Y = \sqrt{3}P\sin\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}P + \alpha P\sin\frac{\pi}{3}$ (5)

$= \frac{\sqrt{3}}{2}P + 2\sqrt{3}P + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha P$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}(5 + \alpha)P$



$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{Y}{X}$ (5)

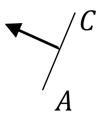
$\therefore Y = \sqrt{3}X$

$i.e.\ \frac{\sqrt{3}}{2}(5+\alpha)P = \sqrt{3}.\frac{1}{2}(7-\alpha)P$

$\therefore\ \alpha = 1$ (5)

20

හෝ



(10) (5)

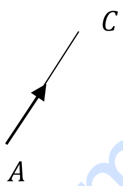
$\alpha P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right) - 2P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$

$\Rightarrow \alpha = 1 + 2 - 2.$

$\Rightarrow \alpha = 1.$

(5)

20



$R = \sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2P\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right)$ (10)

$= \frac{3P}{2} + \frac{2P}{2} + \frac{6P}{2} + \frac{P}{2}$

$= 6P.$

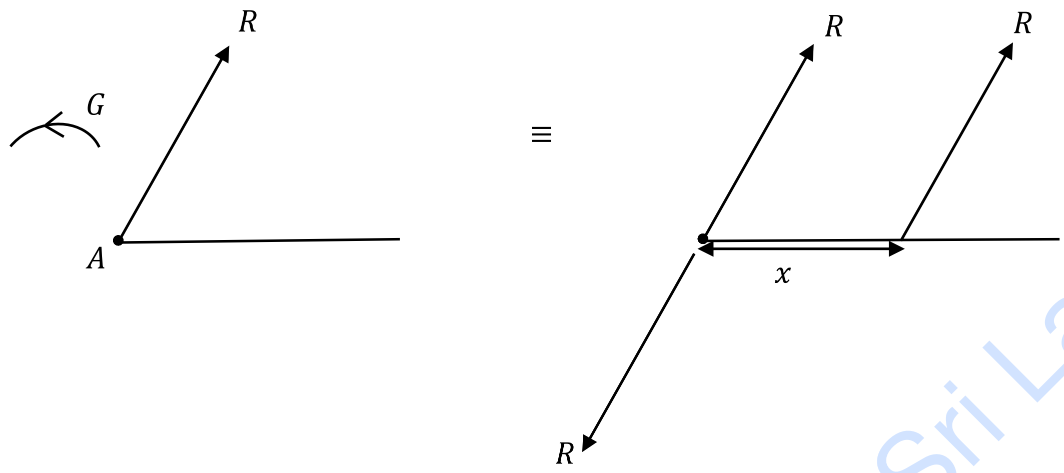
(5)

$A\,;\ G = 2\sqrt{3}P.a + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).2a$ (5)

$G = 2\sqrt{3}Pa\left(1 + \frac{1}{2}\right)$

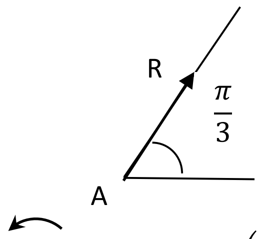
$G = 3\sqrt{3}Pa$ (5)

25



සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය = $R = 6P$ (5)

දිශාව:

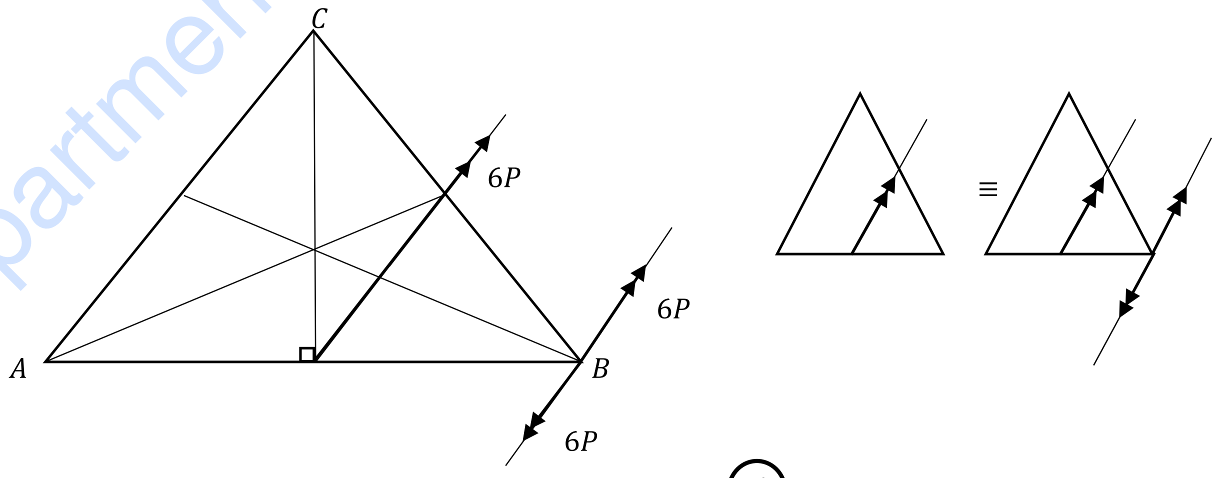


(5)

$A \,; \; 3\sqrt{3}Pa = 6P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x$ (5)

$\therefore x = a$ (5)

20



(5)

↺ $H = 6P.a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

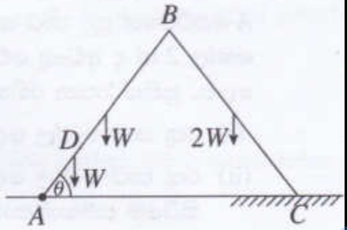
$= 3\sqrt{3}Pa$ (5)

වාමාවර්තව ↺ (5)

15

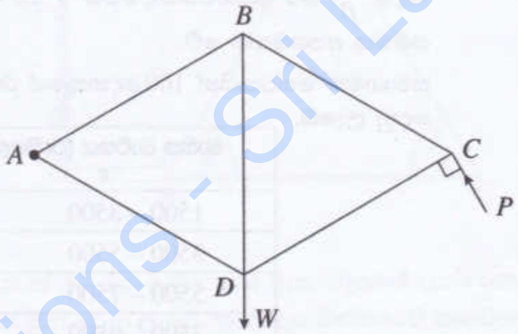
---

15. (a) එක එකෙහි දිග $2a$ වන AB හා BC ඒකාකාර දඬු දෙකක් B අන්තයේදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC දඬුවල බර පිළිවෙළින් W හා $2W$ වේ. A කෙළවර තිරස් ගෙබිමක් මත අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසවි කර ඇත. $AD = \frac{a}{2}$ වන පරිදි AB දණ්ඩ මත වූ D ලක්ෂ්‍යයට බර W වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ $B\hat{A}C = \theta$ ද BC දණ්ඩේ C කෙළවර ඉහත තිරස් ගෙබිමෙහි රළු කොටසක ද තිබෙන පරිදි ය. BC දණ්ඩ හා ගෙබිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. $\cot\theta \leq \frac{15}{7}\mu$ බව පෙන්වන්න.



CB මගින් AB මත B සන්ධියෙහි දී ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව ද සොයන්න.

(b) රූපයේ දැක්වෙන රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කළ සමාන දිගින් යුත් AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. W භාරයක් D සන්ධියෙන් එල්ලා ඇති අතර රාමු සැකිල්ල A හි දී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස සන්ධි කර සිරස් තලයක BD සිරස්ව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ එයට C සන්ධියෙහි දී CD දණ්ඩට ලම්බව රූපයෙහි පෙන්වා ඇති දිශාවට යෙදූ P බලයක් මගිනි.

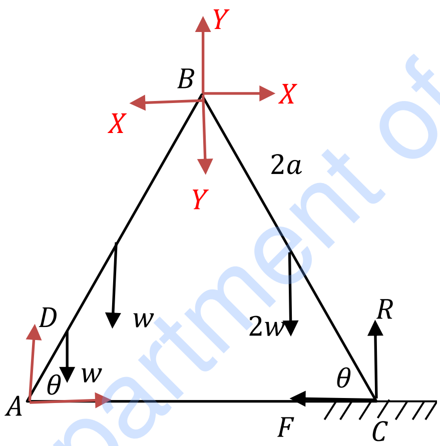


(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් ඒවා සොයන්න.

(a)



පද්ධතිය සඳහා;

A ↺

$$R.4a\cos\theta - w\left(\frac{a}{2}\cos\theta + a\cos\theta\right) - 2w(2a\cos\theta + a\cos\theta) = 0$$ **(15)**

$$\therefore 4R = \frac{3}{2}w + 6w$$

$$R = \frac{15}{8}w.$$ **(5)**

BC සඳහා;

B ↻ $2wa\cos\theta + F2a\sin\theta - R.2\,a\cos\theta = 0$ **(10)**

$\therefore w + F\tan\theta = R$

$\therefore F\tan\theta = \frac{15}{8}w - w.$

$\therefore F = \frac{7}{8}w\cot\theta.$ (5)

සමතුලිතතාවය සඳහා,

$$\mu \geq \frac{F}{R}.$$

$$\frac{7}{8}w\cot\theta \leq \mu\frac{15}{8}w$$

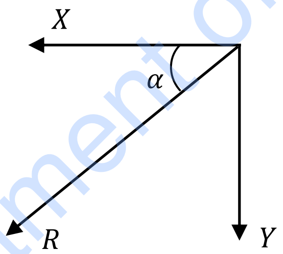
$$\cot\theta \leq \frac{15}{7}\mu. \quad (5)$$

45

$\leftarrow \; BC: \quad X = F = \frac{7}{8}w\cot\theta$ (5)

$\uparrow R + Y = 2w$ (5)

$$Y = 2w - R$$
$$= 2w - \frac{15}{8}w$$
$$= \frac{w}{8} \quad (5)$$



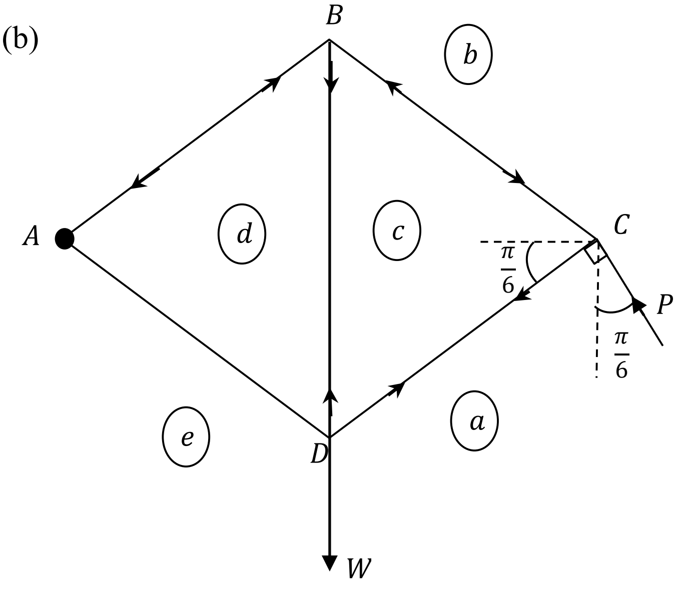
$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= \frac{49}{64}w^2\cot^2\theta + \frac{w^2}{64}$$
$$R = \frac{w}{8}\sqrt{1 + 49\cot^2\theta} \quad (5)$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{w/8}{7w/8\cot\theta} = \frac{\tan\theta}{7}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta}{7}\right) \quad (5)$$

20

(b)

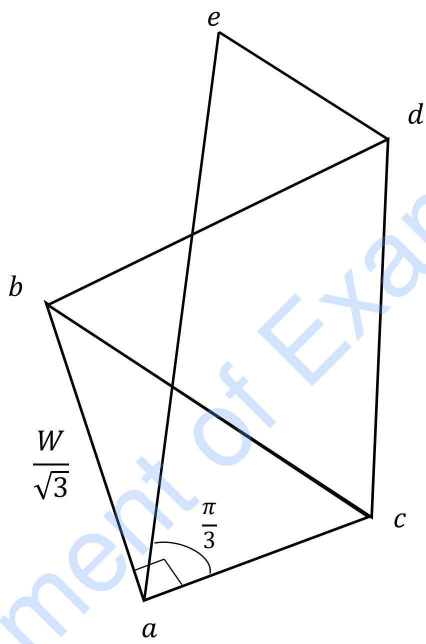


A ↺ $P\cos\frac{\pi}{6}.2x - Wx = 0$ (5)

(මෙහි $AC = 2x$)

$\therefore P = \frac{W}{\sqrt{3}}$ (5)

10



(10) + (10) + (10)

සන්ධි එක එකක් සඳහා (10)

30

දණ්ඩ	ආතතිය	තෙරපුම
AB		$\frac{2W}{3}$
BC		$\frac{2W}{3}$
CD	$\frac{W}{3}$	
DA	$\frac{W}{3}$	
BD	$\frac{2W}{3}$	

විශාලත්වයට (5) බැගින්

ආතති/තෙරපුම් (15)

5 ම නිවැරදි නම් (15)

4 ක් පමණක් නිවැරදි නම් (10)

3 ක් පමණක් නිවැරදි නම් (5)

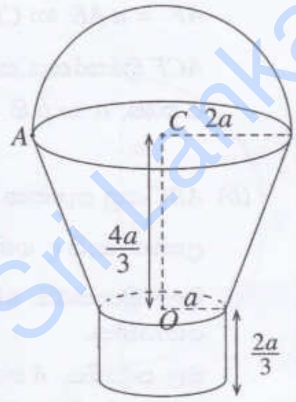
50

16. (i) අරය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර චාපයක හැඩයෙන් යුත් තුනී ඒකාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද,

(ii) උස h වූ ඒකාකාර කුහර සෘජු වෘත්තාකාර කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{3}h$ දුරකින් ද,

පිහිටන බව පෙන්වන්න.

රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, උඩත් හා යටත් වෘත්තාකාර ගැටිවල අරයන් පිළිවෙළින් $2a$ හා a වූ ද උස $\frac{4a}{3}$ වූ ද කුහර සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ඡින්නකයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කබොලකට, පහත දැක්වෙන කොටස් එක එකක් මෙම කබොල හමුවන ස්ථානවලදී දෘඩ ලෙස සවි කිරීමෙන් බාල්දියක් සාදා ඇත.



- අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ ඒකාකාර තුනී වෘත්තාකාර තැටියක්,
- අරය a හා උස $\frac{2a}{3}$ වූ කුහර සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කබොලක්,
- අරය $2a$ හා කේන්ද්‍රය C වූ අර්ධ වෘත්තයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර තුනී කම්බියක්

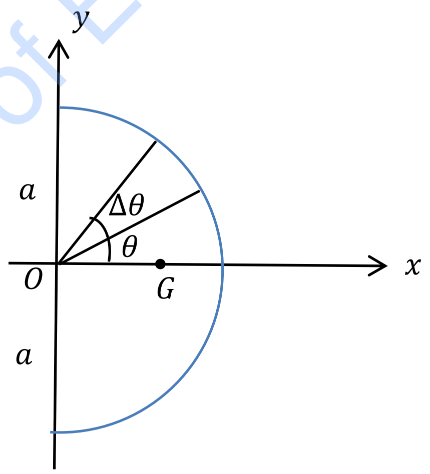
ඡින්නකයේ, තැටියේ හා සිලින්ඩරයේ ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද කම්බියේ ඒකක දිගක ස්කන්ධය $11a\sigma$ ද වේ.

බාල්දියෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $(10\pi+27)\frac{a}{9\pi}$ බව පෙන්වන්න.

කම්බිය, ඡින්නකයේ උඩත් ගැටිය හමුවන A ලක්ෂ්‍යයෙන් බාල්දිය සිරස් තන්තුවකින් නිදහසේ එල්ලනු ලැබූ විට සමතුලිත පිහිටීමේදී OC යටි අත් සිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

(i)

අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බිය



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, x අක්ෂය මත පිහිටයි. **(5)**

$\Delta m = a\Delta\theta\rho$, මෙහි ρ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$OG = \bar{x}$ යැයි ගනිමු.

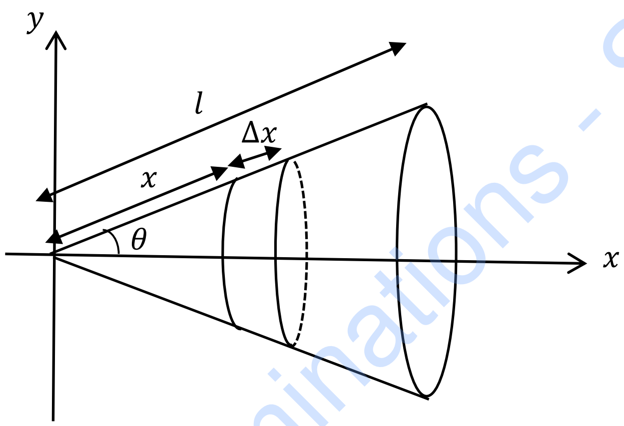
එවිට

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho\, a\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a\rho\, d\theta} = \frac{a\sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2a}{\pi}$$

(5) (5) (5) (5) (5)

30

(ii)



සමමිතියෙන්, ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය G , x අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$$h = l\cos\theta$$

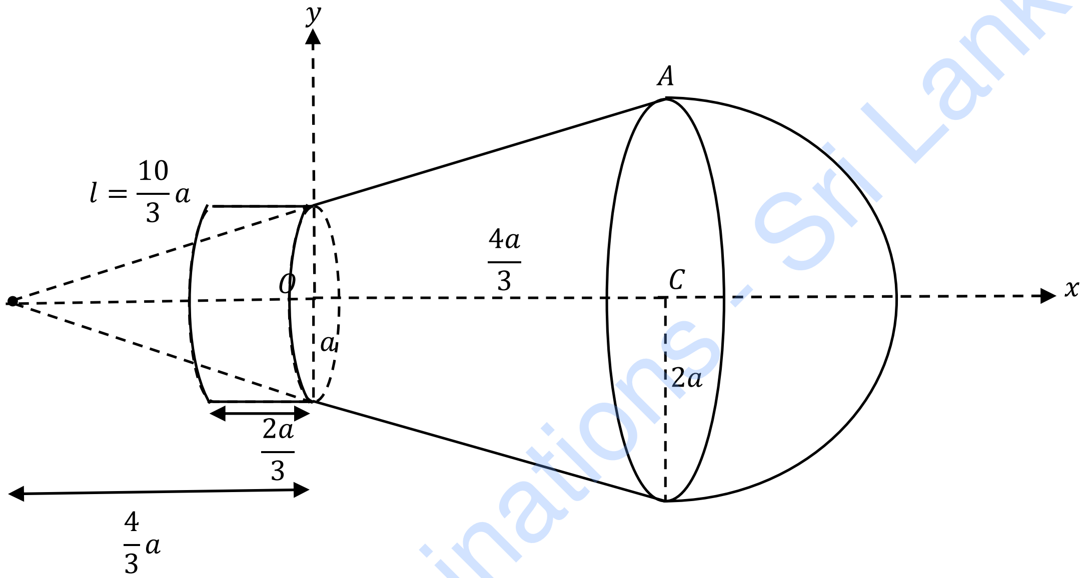
$\Delta m = 2\pi(x\sin\theta)\Delta x\sigma$, මෙහි σ යනු ඒකක දිගක ස්කන්ධය වේ.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_0^l x\cos\theta\, 2\pi\sigma x\sin\theta\, dx}{\int_0^l 2\pi\sigma x\sin\theta\, dx} = \frac{\cos\theta \int_0^l x^2 dx}{\int_0^l x\, dx} = \frac{h/2\ \frac{x^3}{3}\Big|_0^l}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^l} = \frac{2h}{3}$$

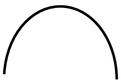
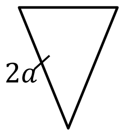
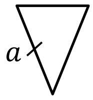
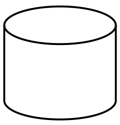
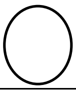
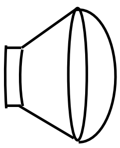
(5) (5) (5) (5) (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය දුර $= \frac{h}{3}$.

30



y
A
$l = \frac{10}{3}a$
$\frac{4a}{3}$
O
C
x
a
2a
$\frac{2a}{3}$
$\frac{4}{3}a$

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර (↑)	
	$\pi(2a)(11a\sigma)$ $= 22\pi a^2\sigma$ (5)	$\frac{4}{3}a + 2\frac{(2a)}{\pi} = \frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}$	(5)
	$\pi(2a)\left(\frac{10}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{20}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$\left[\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}a\right) - \frac{4}{3}a\right] = \frac{4}{9}a$	(5)
	$\pi(a)\left(\frac{5}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{5}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}a\right) = -\frac{4}{9}a$	(5)
	$2\pi a\left(\frac{2}{3}a\right)\sigma$ $= \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$-\frac{1}{3}a$	(5)
	$\pi a^2\sigma$	0	(5)
	$22\pi a^2\sigma + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma + \frac{5}{3}\pi a^2\sigma$ $+ \frac{4}{3}\pi a^2\sigma$ $= \frac{88}{3}\pi a^2\sigma$ (5)	$\bar{x}$	

සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය x අක්ෂය මත පිහිටයි. (5)

$$\frac{88}{3}\pi a^2\sigma\bar{x} = 22\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{3}a + \frac{4a}{\pi}\right) + \frac{20}{3}\pi a^2\sigma\left(\frac{4}{9}a\right) - \frac{5}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{4}{9}a\right) + \frac{4}{3}\pi a^2\sigma\left(-\frac{1}{3}a\right)$$

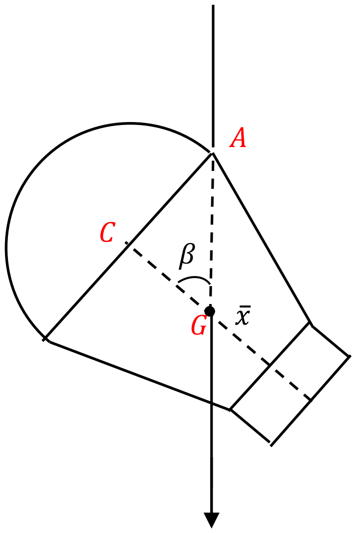
$$\frac{88}{3}\bar{x} = 4a\left(\frac{22}{3} + \frac{22}{\pi} + \underbrace{\frac{20}{27} + \frac{5}{27} - \frac{1}{9}}_{\frac{22}{27}}\right)$$ (15)

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 22 \times 4a\left(\frac{10}{27} + \frac{22}{\pi}\right)$$

$$\frac{88}{3}\bar{x} = 88a\left(\frac{(10\pi + 27)}{27\pi}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{a}{9\pi}(10\pi + 27) \quad (5)$$

75



(5)

$$\tan\beta = \frac{AC}{CG} = \frac{2a}{\frac{4}{3}a - \bar{x}} \quad (5)$$

$$= \frac{18\pi}{27 - 2\pi} \quad (5)$$

$$\therefore \beta = \tan^{-1}\left(\frac{18\pi}{27 - 2\pi}\right)$$

15

---

17. (*a*) A හා B සර්වසම පෙට්ටි එක එකක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම බෝල 10 බැගින් අඩංගු වේ. A පෙට්ටියේ සුදු පාට බෝල 6 ක් ද රතු පාට බෝල 4 ක් ද, B පෙට්ටියේ සුදු පාට බෝල 8 ක් ද රතු පාට බෝල 2 ක් ද අඩංගු වේ. පෙට්ටියක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගෙන, එම පෙට්ටියෙන් එකකට පසු අනෙක ලෙස, ප්‍රතිස්ථාපන රහිතව සසම්භාවී ලෙස බෝල 3 ක් ඉවතට ගනු ලබයි.

(i) රතු පාට බෝල දෙකක් හා සුදු පාට බෝලයක් ඉවතට ගැනීමේ

(ii) රතු පාට බෝල දෙකක් හා සුදු පාට බෝලයක් ඉවතට ගත් බව දී ඇති විට A පෙට්ටිය තෝරාගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) $\bar{x}$ හා σ_x යනු පිළිවෙළින් $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය යැයි ද $i = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා $y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි α හා $\beta\ (>0)$ තාත්ත්වික නියත වේ. $\bar{y} = \frac{\bar{x} - \alpha}{\beta}$ හා $\sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ දත්ත කුලකයේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය වේ.

සමාගමක සේවකයින් 100 දෙනකුගේ රක්ෂණ සැලැස්මක් සඳහා මාසික වාරික පහත සංඛ්‍යාත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

මාසික වාරිකය (රුපියල්) x	සේවකයින් ගණන
1500 – 3500	30
3500 – 5500	40
5500 – 7500	20
7500 – 9500	10

$y = \frac{x - 500}{1000}$ පරිණාමනය භාවිතයෙන්, y හි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය ද, $\frac{3\,(\text{මධ්‍යන්‍යය} - \text{මධ්‍යස්ථය})}{\text{සම්මත අපගමනය}}$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන y හි කුටිකතා සංගුණකය ද නිමානය කරන්න.

ඒ නයින්, x හි මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා කුටිකතා සංගුණකය නිමානය කරන්න.

(a)

A	B
$W - 6$	$W - 8$
$R - 4$	$R - 2$

X යනු රතු බෝල දෙකක් හා එක් සුදු බෝලයක් ඉවතට ගැනීමේ සිද්ධිය යැයි ගනිමු.

(i) $P(X) = P(X|A)P(A) + P(X|B)P(B)$ ____________ (1)   **5**

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$ **5**

(5) (5) (5)

$$P(X|A) = \frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} + \frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8} + \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}$$

$$= \frac{3}{10}.$$ (5)

(5) (5) (5)

$$P(X|B) = \frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8} + \frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8} + \frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{15}.$$ (5)

(1) මගින්,

$$P(X) = \frac{3}{10}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{60}$$ ලැබේ. (5)

55

(ii)

$$P(A|X) = \frac{P(X|A)P(A)}{P(X)}$$ (5) [හෝ බේස් ප්‍රමේයය]

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{11}{60}}$$

$$= \frac{9}{11}$$ (5)

10

(b)

$$y_i = \frac{x_i - \alpha}{\beta}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$ (5)

$$= \frac{1}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha)$$

$$= \frac{1}{n\beta}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\alpha\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \alpha\right\}$$

$$= \frac{\overline{x} - \alpha}{\beta}.$$ (5)

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}$$ (5)

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \alpha}{\beta} - \frac{\overline{x} - \alpha}{\beta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n\beta}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\beta^2}$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{\sigma_x}{\beta}$$ (5) ($\because$

20

පන්ති ප්‍රාන්තර x	f	පන්ති ප්‍රාන්තර y	මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය y (5)	fy (5)	fy^2 (5)
1500-3500	30	1-3	2	60	120
3500-5500	40	3-5	4	160	640
5500-7500	20	5-7	6	120	720
7500-9500	10	7-9	8	80	640
				$\sum fy = 420$ (5)	$\sum fy^2 = 2120$ (5)

$$\bar{y} = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{420}{100} = 4.2$$ (5)

(5)

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum fy^2}{\sum f} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{2120}{100} - 4.2^2}$$

$$= \sqrt{21.2 - 17.64}$$

$$= \sqrt{3.56} \approx 1.887$$ (5)

$M_y = y$ හි මධ්‍යස්ථය $= 50$ වැනි දත්තය

එවිට

$$M_y = 3 + \frac{(50-30)}{40}(5-3) = 4$$ (5)

$\therefore$ කුටිකතා සංගුණකය $\gamma \approx \dfrac{3(4.2-4)}{\sqrt{3.56}} \approx 0.317$

(5)

50

$\overline{x} = 1000\overline{y} + 500$

$= 1000 \times 4.2 + 500$

$= 4700$ (5)

$\sigma_x = 1000\, \sigma_y$

$\approx 1000 \times 1.887$

$= 1887$ (5)

කුටි කතා සංගුණකය වෙනස් නොවේ..

$S_x = S_y \approx 0.317$ (5)

15
